DOI: 10.3785/j.issn.2096-7195.2023.02.008

基于 FEM 的改良煤矸石边坡稳定性分析

李瑞杰 1,2,3, 李学丰 1,3*

(1. 宁夏大学 物理与电子电气工程学院, 宁夏 银川 750021; 2. 宁夏公路管理中心, 宁夏 银川 750011;3. 宁夏大学 固体力学研究所, 宁夏 银川 750021)

摘 要:煤矸石是煤矿开采后的固体废物,堆积后的煤矸石排土场持续影响矿区生态,其边坡稳定特性受到广泛 关注。本文以宁夏宁东某矿区生态实施修复重建的煤矸石边坡为例,对边坡结构进行改良,构建基于水土保持特 性的改良煤矸石边坡,构建草植层、渗流层和过滤层的分层边坡结构,可以提高边坡稳定性,初步满足土地复垦 需要。基于 FEM 建立了改良煤矸石边坡数值模拟模型。数值模拟结果表明,在平面应变试验条件下,会产生"X" 型剪切带,剪切带的发育程度与围压及应力水平相关;改良煤矸石边坡失稳易发生在边坡坡脚处,在剪应力与水 平力共同作用下,会发生较大的变形,产生较大位移;持续降雨对改良煤矸石边坡的影响较小。研究结果为矿区 改良煤矸石边坡稳定性实践和矿区生态环境安全提供了参考。

关键词:煤矸石排土场;边坡;稳定性;降雨;数值模拟

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 2096-7195(2023)02-0144-08

Stability analysis of improved coal gangue slope based on FEM

LI Rui-jie^{1,2,3}, LI Xue-feng^{1,3*}

(1. School of Physics and Electronic-Electrical Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, Ningxia, China;

2. Ningxia Highway Administration Center, Yinchuan 750011, Ningxia, China;

3. Institute of Solid Mechanics, Ningxia University, Yinchuan 750021, Ningxia, China)

Abstract: Coal gangue is a type of solid waste after coal mining. The coal gangue stock dump continues to affect the ecology of the mining area, and its slope stability characteristics have received extensive attention. This paper takes the coal gangue slope of Ningdong mining area as an example to improve the slope structure. An improved coal gangue slope was constructed based on the characteristics of water and soil conservation. The layered slope structure of grass planting layer, seepage layer and filter layer can effectively improve the slope stability and initially meet the needs of land reclamation. The numerical model of the improved coal gangue slope was established based on FEM. The numerical simulation results show that an 'X'-shaped shear band is generated under the condition of the plane strain test, and the development degree of the shear band is related to the confining pressure and stress level. The slope instability easily occurs at the toe of slope. When the shear stress and the horizontal force act together, a large deformation and displacement occur. However, the continuous rainfall has little effect on the stability of the improved coal gangue slope. The research results provide a reference for improving the stability of coal gangue slopes in the mining area and the safety of the ecological environment in the mining area.

Key words: ganaue dump site; slope; stability; rainfall; numerical simulation

0 引 言

宁夏宁东地区地处中国能源化工金三角(宁夏 宁东、陕西榆林、内蒙古鄂尔多斯)的核心区,煤 炭资源丰富,是宁夏回族自治区重要的煤炭能源基地,也是宁夏生态环境脆弱区。近些年来地下煤矿 开采后,大量煤矸石及废料堆积形成了占地面积较 大的排土场。通常出于经济实用性的考虑,排土场

收稿日期: 2022-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(1216020092); 宁夏科技创新领军人才计划项目(KJT2019001); 宁夏"多尺度力学与工程应用自治区 科技创新团队"。

作者简介:李瑞杰(1987—),男,宁夏隆德人,博士研究生,工程师,主要从事公路工程和岩土工程方面研究工作。E-mail: lrj456@163.com。 *通信作者:李学丰(1976—),男,宁夏平罗人,教授,博士生导师,主要从事岩土本构理论应用及环境岩土工程方面的研究工作。 E-mail: lixuefeng1928@163.com。

边坡坡度较大、堆积废弃物种类繁多, 排土场面临边 坡稳定安全和生态环保经济的双重矛盾[1-2],严重破坏 了原有地貌和矿区生态环境,严重影响了地区社会 经济的可持续发展。土地逐步损毁,植被退化进一步 影响了矿区的可持续发展。此外,采煤沉陷区也会对 植被生长造成一定程度的影响。对此,国内外普遍开 展了各类采煤迹地排土场生态修复工程,提出了保 持排土场边坡稳定性的措施,通过对矿区土壤基质 的改良和复垦开发,实现对矿区生态的持续修复[3-4]。 大量研究表明,生态修复与边坡稳定性既是一项系 统工程,又是协调统一的整体。排土场边坡稳定性受 边坡结构(坡度、组分)、自然因素(地震、降雨、 地质失稳)等多种因素影响。赵国贞等[5]以底山村 矸石山为例,应用 Midas GTS NX 有限元数值模拟, 对比分析了天然、地震、降雨 3 种工况下的矸石山 边坡稳定性, 计算结果表明降雨工况下边坡失稳的 变形最为明显。KHAN 等[6]研究了降雨入渗速率对 煤矸石边坡失稳的影响,基于有限元的分析结果进 一步证实,应力和孔隙水压力的耦合效应对非饱和 煤矸石堆积体边坡稳定性影响较大。林江宇等门以 煤矸石高边坡为例,通过 FLAC 3D 数值模拟发现, 降雨会对煤矸石边坡临界滑动面产生影响,特别是 持续降雨的影响加剧了滑动面的移动。

综上,现有大量研究指出,边坡失稳破坏是一 个渐进过程,会伴随初始应变产生至应变局部化, 进而向应力剪切破坏持续演化,最终由多种因素共 同引发边坡结构失稳。现有研究对基于水土保持的 改良煤矸石边坡稳定研究较少,本文以宁夏宁东地 区某煤矿排土场为例,旨在对矿区改良煤矸石边坡 稳定性进行研究,关于构建新土体的内容和方法在 此不做介绍。

1 改良煤矸石边坡

1.1 煤矸石简介

煤矸石是一种较为特殊的堆石材料,系采煤和 洗煤过程中产生的固体废弃物,其主要成分以次软 岩石或极软岩石为主,SiO2和Al2O3是其化学主要 成分,约占总成分的67%~90%左右^[8],具有强度 低、自燃、易破碎等特殊性质。因煤矿生产和开采 需要,常会产生大量的煤矸石在排土场堆积。当受 到外力破坏或者暴雨侵蚀时,常因其堆积过高、坡 度过大,易引发滑坡和泥石流等自然灾害,影响矿 区生态环境安全。因此,基于水土保持的改良煤矸 石边坡稳定性分析具有重要意义。

1.2 工程背景

宁东镇煤炭资源探明储量 273 亿吨,是全国十 三个大型煤炭基地之一,其位于宁夏灵武市东部, 处于荒漠化、半荒漠化地带,为缓坡丘陵地貌,是 宁夏地区水土重点保护区域。本工程应用实例选自 宁夏宁东能源化工基地附近某大型煤矿生产区,如 图 1 为某煤矸石废弃料原始堆积现场,该煤矿煤矸 石年总产量达 10.29 万 m³,原排矸石场占地 7.12 hm²,设计堆高 16 m,排矸石场容量约为 113.9~210.29 万 m³。此外,现有研究发现草本植 物可有效加固排土场边坡,其根系可以改变边坡的 破坏形态^[9]。因此,拟定当煤矸石堆放达到标准高 度后,采取覆土措施构建新土体,并播撒草籽恢复 植被,满足生态重建的需要。



图 1 某煤矸石废弃料原始堆积现场 Fig. 1 Stock dump of a coal gangue waste

2 改良煤矸石边坡结构特性

2.1 改良煤矸石边坡

煤矸石废弃料在原始条件下形成的堆积边坡 受矿区生产活动的影响较大,在受到外力影响下, 边坡结构渐进失稳易引发滑坡等地质灾害,严重影 响矿区安全生产环境。因此,稳定的地形地貌是煤 矿区安全生产和绿色可持续发展的必要条件。对矿 区煤矸石边坡进行有效治理,创造较好的经济和环 境效益,迫切需要对原有煤矸石边坡进行改良,并 对其边坡稳定性开展研究。

对此,本研究对现有原始条件下的煤矸石边坡 进行改良,主要目的是构建基于水土保持的改良煤 矸石边坡。边坡表层材料就地取材,主要以当地砒 砂岩、沙黄土、煤矸石为主要材料,建立配比为2: 2:1的改良煤矸石边坡表层新土体,使得改良后的 煤矸石边坡的结构分层具备隔水、涵养水分、抑制 水分蒸发的特点。同时,如图2所示,采用小型X 射线荧光重金属元素分析设备(XRF)分析了改良 煤矸石边坡表层新土体中镉(Cd)、汞(Hg)、砷 (As)、铅(Pb)、铬(Cr)等几种有害元素的分布, 测试结果符合《土壤环境质量农用地土壤污染风险 管控标准(试行)》(GB15618—2018)中土壤重金 属元素风险筛选值限值,满足土地复垦要求,能够 满足植被生长需要。



图 2 某小型 X 射线荧光重金属元素分析设备 Fig. 2 X-ray fluorescence spectrometer heavy metal element analysis equipment

2.2 改良煤矸石边坡结构特性

改良煤矸石边坡结构层功能性描述为浅层径 流,防止水土流失;中层渗流,形成持续有效排水 通道;深层吸收多余水分。如图3所示,改良煤矸 石边坡结构由表及里分别为草植层、渗流层和过滤 层。其中,最外层为草植层,厚度约为1m,主要 作用是固化边坡,防止因水土流失造成边坡失稳; 中间为渗流层,厚度约为2m,其作用是在保证边 坡稳定的前提下,形成渗透水系通道,流向边坡基 层;边坡基层为过滤层,主要作用是吸入和保存过 量水分,避免降雨条件下水分的流失。



图 3 某改良煤矸石边坡结构 Fig. 3 Structure of an improved coal gangue slope

3 改良煤矸石边坡数值建模

3.1 改良煤矸石试验建模

为了便于对煤矸石边坡开展数值模拟,根据现场煤矸石排土场实际情况,做如下假设:(1)仅考虑某一断面的堆石料边坡稳定性,即 *x-z* 平面的边

坡;(2)考虑 3 种情况下的煤矸石边坡稳定情况, 根据陡峭型(45°~60°)、适中型(35°~45°)、高大 型(25°~35°)范围,选取适当的边坡坡角开展建 模;(3)改良煤矸石结构为横观各向同性材料。本 实例边坡采用基于材料特性相关位势理论的弹塑 性本构模型,模型参数如表1所示,详细过程见参 考文献[10-11]。

Table 1 Constitutive model parameters				
参数类型	取值	参数类型	取值	
材料常数 Go	1.709	模型参数1	0.744	
泊松比v	0.300	模型参数 κ	0.008	
临界状态参数 Mcs	1.727	模型参数λ	0.699	
临界状态参数 a'	0.032	状态相关参数 do	2.267	
临界状态参数 b'	0.527	状态相关参数 c _ψ	0.980	
临界状态参数 c'	0.313	状态相关参数 h1	0.460	
临界状态参数 kh	0.120	状态相关参数 h ₂	0.780	
临界状态参数 λ _c	0.140	状态相关参数 h3	4.950	
大气压强 Pa/kPa	101	状态相关参数 ka	0.458	

表1 本构模型参数

实践证明,边坡稳定性与垂直沉降和侧向变形 有着密切的联系^[12]。基于上述基本假设,为了数值 模拟平面应变试验剪切情况,建立双轴试验模型, 以观测应变局部化及剪切带发展过程及其变化规 律。试验选取的材料初始分形维数为 2.082,比重为 2.77,相对密度 *D*_r为 1.0,初始孔隙比 *e*₀为 0.297, 密度为 2.18 g/cm³。

双轴试验应力加载如图 4 所示,选取材料试样, 在围压下固结稳定后,同时施加轴向力和水平方向 力。令 η=dσ1/dσ2,取 η=0.5 时,分别在低围压 300 kPa 和高围压 1 500 kPa 下观察双轴试验的应变演化规 律。在 FEM 上建立双轴试验的模型如图 5 (a)所 示,模型的宽为 10 cm,高为 20 cm,底端固定,上 端及两边施加负荷。为了便于观察模型的尺寸变形, 将模型以边长 2 cm 的正方形进行网格划分,总共 划分了 50 个单元,66 个节点。



图 4 双轴试验模拟应力加载示意图 Fig. 4 Simulation of stress loading in biaxial test

图 5 (b) 和 (d) 分别为 300 kPa 和 1 500 kPa 围压下应变 *ε*x 的变化情况。图中出现一定程度的 应变集中,在平面两侧形成了"X"型的交叉型剪 切带,但高围压下应变集中趋势更为明显,有限元 数值模拟结果显示在高应力作用下进一步加速了 左侧剪切带的贯通及剪切带内颗粒的旋转、移动 程度。

图 5 (c) 和 (e) 分别为 300 kPa 和 1 500 kPa 围 压下应变 ε_y 的变化情况。与图 5 (b) 和 (d) 类似, 右侧剪切带在平面应变条件下,也出现了较为明显 的 "X"型剪切带,但由于轴向力增量较小,故右侧 剪切带的发育贯通程度不如左侧剪切带明显。





3.2 改良煤矸石边坡建模

对排土场实际尺寸进行测量,边坡基层宽度 *a* 为 36 m,边坡高度 *h*₂ 为 10 m,据此建立模型,模

型尺寸与改良煤矸石边坡实际尺寸一致,如图6所 示。考虑到排土场的荷载类型主要为重力加载,为 简化计算过程,近似用 3.1 节中建立的双轴模型表 示堆石料边坡。即截取堆石料边坡某一断面,仅研 究竖向和水平向应力应变情况。



Fig. 6 Example of the improved coal gangue slope

网格划分会影响有限元模型的计算速度,考虑 到草植层和渗流层是应变滑移变化区,是重点观测 区域,因此单位网格长度选定为0.2m;而边坡基层 为次重点区域,单位网格长度选定为1m。考虑到 不同地形下边坡的实际情况,根据边坡倾角和坡度 尺寸将堆石料改良煤矸石边坡划分为陡峭型、适中 型和高大型3种界面,如图7所示。3种类型边坡 有限元模型的参数如表2所示。



图 7 基于有限元建立的改良煤矸石边坡模型 Fig. 7 Finite element model of improved coal gangue slope

Table 2 Finite element slope model parameters				
边坡类型	陡峭型	适中型	高大型	
截面节点/个	1 963	1 949	3 481	
截面单元/个	1 868	1 842	3 347	
模型节点/个	21 593	21 439	38 291	
模型单元/个	18 680	18 420	33 470	
边坡高度 h1/m	6	6	12	
坡面长度 d/m	6.7	8.5	22	
坡面斜角 α/(°)	63	44	33	

表 2 有限元边坡模型参数

4 改良煤矸石边坡稳定性分析

4.1 改良煤矸石边坡稳定性分析

在受到重力荷载作用下,边坡 σ_x应力云图如图 8 所示,图中应力单位为 Pa。结果表明 3 种类型边 坡的应力呈层状分布,应力在边坡和坡角处均存在 不同程度的应力集中,其中陡峭型边坡的应力集中 程度最大,滑动面出现滑动,边坡滑移趋势增大,易 发生失稳现象,适中型边坡相对稳定性最好。



Fig. 8 Numerical simulation of stress nephogram of improved coal gangue slope

图 9 为改良煤矸石边坡水平方向位移云图,位 移单位为 m。通过观察发现,位移在边坡处分层, 坡角处的位移较大,受到坡角应力集中的影响,当 边坡土体剪应力与水平应力共同作用在坡角时,会 产生较大的塑性变形;陡峭型和适中型边坡在垂直 方向的位移较大,高大型边坡在垂直方向的位移较 小。应力分布与边坡形状相适应,在分层错位处的 应变易发生失稳,由此造成边坡外层土体向外侧滑 移,局部应力集中对应变集中行为起到诱发作用, 当滑移面持续滑动至达到极限后,边坡会失稳倒塌。 相对而言,高大型和陡峭型边坡更易出现应力集中 现象,由此边坡应变集中影响边坡位移的整体趋势 为向前下方移动,进而对边坡破坏具有推动作用。





Fig. 9 Numerical simulation of displacement nephogram of improved coal gangue slope

4.2 考虑降雨影响的改良煤矸石边坡稳定性分析

TANG 等^[13] 研究发现,一般情况下,降雨入渗的深度不超过 3 m,但若降雨形成渗透通道进入深层 土体,势必影响边坡稳定性。马蓓青等^[14] 研究了持续降雨对黄土的影响得到了类似结论。降雨持续入 渗使得黄土边坡的局部土体发生剪切破坏,形成贯 通滑动面,进而发生滑坡,主要原因是持续降雨使得 边坡土体含水量增大,降低了土体强度。基于4.1节 中改良煤矸石边坡稳定性分析结果和宁夏宁东某煤 矿现场实际情况,建立适中型改良煤矸石边坡模型, 该边坡建模尺寸与实际尺寸一致,边坡高度 h 为 30 m,边坡底边长度 a 为 54 m,坡角 a 约为 41°。 考虑到宁夏宁东地区处于西北内陆,降雨量偏少,故 本次以持续中强度降雨条件模拟降雨对改良煤矸石 边坡稳定性的影响,即降雨强度为 50 mm/d。

图 10 为持续降雨状态对改良煤矸石边坡稳定性 的影响,等值线为边坡某位置处的饱和度。在降雨初 期,边坡土体分层均匀;随着持续的雨水渗入,在降 雨 24 h 后,持续降雨使得边坡表层土体饱和,土体 内部孔隙水压力升高,受自重应力和雨水渗入影响, 在边坡表层出现了一定程度的应力集中;在降雨 48 h 后,降雨影响减弱,边坡趋于稳定,强度恢复。 总体而言,由于改良煤矸石边坡特有的水土保持结 构特性,该强度下雨水渗入对边坡影响并不明显。



5 结 论

本文基于宁东地区某煤矿排土场边坡工程应 用背景,对改良煤矸石边坡稳定性进行分析,并在 宁夏宁东某煤矿和内蒙古乌海某煤矿得到了初步 实践和应用,如图 11 所示。模拟及工程实践结果进 一步表明,本文中适中型边坡在降雨、灌溉等条件 下较高大型、陡峭型边坡稳定,且新土体的自然分 化和融合效果较好,有利于矿区生态的可持续发 展。具体如下:

(1)以当地砒砂岩、沙黄土、煤矸石废料按一 定比例构成的改良煤矸石边坡,既能初步满足复垦 要求,提供植被覆盖生长需要,也可变废为宝,实 现绿色循环发展。

(2)由双轴模拟试验可知,在平面应变试验条 件下,会产生"X"型剪切带,剪切带的程度与围压 及应力水平相关。

(3)由改良煤矸石边坡稳定分析可知,边坡失 稳易发生在坡角处,当剪应力与水平力共同作用在 坡角处时,会发生较大的变形,从而产生较大位移, 随着边坡角度和边坡高度的增大,边坡稳定性降低。

(4)持续降雨对改良煤矸石适中型边坡影响 较小,说明了基于水土保持的改良煤矸石边坡受雨 水的影响较小,具有较好的适用性。



图 11 改良煤矸石边坡应用实例 Fig. 11 Application of improved coal gangue slope

参考文献

[1] 杨天鸿,张锋春,于庆磊,等.露天矿高陡边坡稳定性研究现状及发展趋势[J]. 岩土力学, 2011, 32(5): 1437-1451, 1472.

YANG Tian-hong, ZHANG Feng-chun, YU Qing-lei, et al. Research situation of open-pit mining high and steep slope stability and its developing trend[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(5): 1437-1451, 1472.

[2] 刘彦,马小军,王彪龙,等.弃土场边坡稳定性和可靠
 性的多工况对比分析[J].安全与环境工程,2022,29(1):
 93-100.

LIU Yan, MA Xiao-jun, WANG Biao-long, et al. Comparative analysis of stability and reliability of spoil dump slope under multiple working conditions[J]. Safety and Environmental Engineering, 2022, 29(1): 93–100.

 [3] 吴淑莹,周伟,袁涛,等. 宁东煤矿基地采煤沉陷区植 被动态变化研究[J]. 西北林学院学报,2020,35(1): 218-225.

WU Shu-ying, ZHOU Wei, YUAN Tao, et al. Vegetation dynamics in mining subsidence area of Ningdong coal mine base[J]. Journal of Northwest Forestry University, 2020, 35(1): 218–225.

[4] 方瑛,马任甜,安韶山,等.黑岱沟露天煤矿排土场不同植被复垦土壤酶活性及理化性质研究[J].环境科学, 2016, 37(3): 1121-1127.

FANG Ying, MA Ren-tian, AN Shao-shan, et al. Heidaigou opencast coal mine: soil enzyme activities and soil physical and chemical properties under different vegetation restoration[J]. Environmental Science, 2016, 37(3): 1121–1127.

- [5] 赵国贞, 吕义清, 关军琪, 等. 底山村矸石山生态修复及 其边坡稳定性分析[J]. 煤炭工程, 2021, 53(4): 152-157.
 ZHAO Guo-zhen, LV Yi-qing, GUAN Jun-qi, et al. Ecological restoration and slope stability analysis of hillock in Dishan Village[J]. Coal Engineering, 2021, 53(4): 152-157.
- [6] KHAN K U J, WANG C M, KHAN M W J, et al. Influence of rainfall infiltration on the stability of unsaturated coal gangue accumulated slope[J]. Journal of Mountain Science, 2021, 18(6): 1696–1709.
- [7] 林江字, 吴勇, 马鑫文, 等. 降雨条件下煤矸石高边坡
 稳定性评价[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(34): 14775-14782.

LIN Jiang-yu, WU Yong, MA Xin-wen, et al. Stability evaluation of coal gangue high slope under rainfall conditions[J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(34): 14775–14782.

[8] 臧亚君.山区矸石山降雨入渗特性及其稳定性研究[D].重庆:重庆大学,2008.

ZANG Ya-jun. Characteristics of rain infiltration and its stability research of coal waste dump in mountainous area[D]. Chongqing: Chongqing University, 2008.

 [9] 刘向峰,郝国亮,张怡斌,等. 草本植物对排土场边坡 稳定性提升效果研究[J]. 中国安全生产科学技术, 2021,17(9):103-108.

LIU Xiang-feng, HAO Guo-liang, ZHANG Yi-bin, et al. Study on improvement effect of herb plants on slope stability of dumping site[J]. Journal of Safety Science and Technology, 2021, 17(9): 103–108.

- [10] 李学丰,李瑞杰,张军辉,等. 堆石料三维强度特性
 [J]. 中国公路学报, 2020, 33(9): 54-62.
 LI Xue-feng, LI Rui-jie, ZHANG Jun-hui, et al. Threedimensional strength characteristic of rockfill[J]. China Journal of Highway and Transport, 2020, 33(9): 54-62.
- [11] LI X F, LI R J, ZHANG J H, et al. The constitutive model of rockfill based on property-dependent plastic potential theory for geomaterials[J]. Advances in Civil Engineering, 2020, 2020: 8868600.

- [12] 张鲁渝,时卫民,郑颖人. 平面应变条件下土坡稳定 有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(4): 487-490.
 ZHANG Lu-yu, SHI Wei-min, ZHENG Ying-ren. The slope stability analysis by FEM under the plane strain condition[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(4): 487-490.
- [13] TANG Y M, XUE Q, LI Z G, et al. Three modes of rainfall infiltration inducing loess landslide[J]. Natural Hazards, 2015, 79(1): 137–150.
- [14] 马蓓青, 杜玉鹏, 王怀星, 等. 持续降雨条件下黄土边 坡稳定性试验研究[J]. 水土保持学报, 2021, 35(5): 50-56.

MA Bei-qing, DU Yu-peng, WANG Huai-xing, et al. Experimental study on stability of loess slope stability under continuous rainfall[J]. Journal of Soil and Water Conservation, 2021, 35(5): 50–56.

(上接第125页)

- [8] WU W, BAUER E. A simple hypoplastic constitutive model for sand[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1994, 18(12): 833– 862.
- [9] WU W, LIN J, WANG X T. A basic hypoplastic constitutive model for sand[J]. Acta Geotechnica, 2017, 12(6): 1373–1382.
- [10] 李学丰, 袁琪, 王兴. 砂土材料状态相关临界状态各向 异性模型[J]. 土木建筑与环境工程, 2015, 37(3): 70-78.
 LI Xue-feng, YUAN Qi, WANG Xing. A critical state anisotropic model with state-dependent of sand[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2015, 37(3): 70-78.
- [11] ERINGEN A C. Microcontinuum Field Theories: I.

Foundations and Solids[M]. New York: Springer Science+Business Media, 1999: 103–106.

- [12] 何玉琪. 各向异性砂土的多尺度渐进破坏与亚塑性本 构描述[D]. 银川: 宁夏大学, 2019.
 HE Yu-qi. Multi-scale progressive failure for anisotropic sand and its description with hypoplastic constitutive model[D]. Yinchuan: Ningxia University, 2019.
- [13] 唐洪祥,李锡夔. 地基渐进破坏及极限承载力的 Cosserat 连续体有限元分析[J]. 岩土力学,2007,28(11): 2259-2264.

TANG Hong-xiang, LI Xi-kui. Finite element analysis of Cosserat continuum for progressive failure and limit bearing capacity of soil foundation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(11): 2259–2264.