

# 粉黏混合土的临界状态统一本构模型研究

孙昊, 钱建固, 时振昊

(同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室 / 地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 粉黏混合土是指含量以粉粒和黏粒为主的土体。本文为了模拟粉黏混合土的应力应变关系, 提出了一个以改变屈服面形态为特点的本构模型。本模型采用一个联合状态参数模型中的屈服面, 利用其由两个参数控制屈服面形态的特点, 采用修正剑桥模型的塑性势, 使之能够用于模拟粉黏混合土的应力应变关系。本文通过对实验结果进行模拟, 验证了模型的准确性。对模型中控制屈服面形态的参数对屈服面形态的影响进行了分析, 建立了控制屈服面形态的参数与塑性指数之间的经验性关系。研究表明, 随着粉土含量增加, 土体塑性指数减小, 不排水极限偏应力和最大有效应力比增大, 空间比和应力状态系数减小, 屈服面最高点向左上方移动。

**关键词:** 粉黏混合土; 联合状态参数模型; 屈服面形态; 塑性指数; 应力应变关系

中图分类号: TU470

文献标识码: A

文章编号: 2096-7195(2022)S-0072-06

## Study on critical state unified constitutive model of silty clay mixed soil

SUN Hao, QIAN Jian-gu, SHI Zhen-hao

(Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education /

Department of Geotechnical Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Silt clay mixed soil refers to the soil that consists largely of silt and clay. In order to simulate the stress-strain relationship of silty clay mixed soil, a constitutive model characterized by changing the shape of yield surface is proposed in this paper. In this model, the yield surface of a unified state parameter model is adopted. Taking advantage of the characteristics that the shape of yield surface is controlled by two parameters, and the plastic potential of modified Cambridge model is adopted, so that it can be used to simulate the stress-strain relationship of silty clay mixture. In this paper, the accuracy of the model is verified by simulating the experimental results. The influence of the parameters controlling the shape of the yield surface in the model on the shape of the yield surface is analyzed, and the empirical relationship between the parameters controlling the shape of yield surface and plasticity index is established. The results show that with the increase of silt content, the soil plasticity index decreases, the undrained ultimate deviatoric stress and the maximum effective stress ratio increases, simultaneously, the space ratio and stress state coefficient decrease, and the highest point of yield surface moves to the upper left.

**Key words:** silty clay mixed soil; unified state parameter model; shape of yield surface; plasticity index; stress-strain relationship

## 0 引言

粉(砂)黏混合土是指含量以粉(砂)粒和黏粒为主的土体, 大量学者研究黏粒含量对粉(砂)黏混合土物理力学性质的影响, 得出许多重要的结论。YIN<sup>[1]</sup> 对不同黏土含量的香港海相沉积行为进行实验研究, 试验结果表明, 随着塑性指数的增加, 沉积土的摩擦角减小, 杨氏模量也随着有效围压的

增加而增加, 但随着黏土含量的增加而减小。MUIR等<sup>[2]</sup> 对高岭土黏土和均质粗砂的各向同性正常固结和超固结混合物进行排水和不排水三轴压缩试验, 结果表明, 砂土的存在对偏应力、黏土体积应变和孔隙水压力都没有影响, 直到黏土含量降至40%以下。JAFARI等<sup>[3]</sup> 对砾质黏土和砂质黏土混合物进行一系列应变控制的单调和循环三轴试验, 以研究骨料对混合物力学行为的影响, 压缩单调试验

收稿日期: 2022-04-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52178345)。

作者简介: 孙昊(1997—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 硕士研究生, 主要从事土体应力应变关系的研究。E-mail: 1932410@tongji.edu.cn。

结果表明: 单调荷载作用下内摩擦角随集料含量的增加而增大, 同时, 随着集料含量的增加, 在单调荷载和循环荷载作用下, 孔隙水压力均增大, 此外, 黏性基质中的团聚体的存在导致混合物黏性部分形成非均匀密度场。YANG 等<sup>[4]</sup>通过对不同细粒含量的 Toyoura 砂进行试验, 发现随着细粒含量从 0~15% 逐渐增加, 土体展现出从硬化到软化, 从剪胀到剪缩过渡的现象。这与对上海第 3 层重塑粉质黏土进行试验得到的先剪缩再剪胀的结论一致<sup>[5]</sup>。

目前对于砂黏混合土的研究较多, 然而对于粉黏混合土的实验和理论研究却较少。最近的研究表明上海第 2~6 层黏土中含有较多的粉粒 (50%~80%), 即粒径在 0.005~0.075 mm 的土颗粒<sup>[6]</sup>。因此如果要建立上海粉黏混合土的本构模型就必须参考砂黏混合土的实验结论和理论构建方法。

目前关于统一本构模型的建立主要有以下几种方法, 其一是通过统一状态依赖弹性模量和塑性硬化模量, 使之对于不同细粒含量具有不同的弹性和硬化参数<sup>[7]</sup>; 其二是通过引入新的破坏准则导出变换应力张量并且根据联合流动法则推导出独立于应力路径的新的硬化参数, 新的硬化参数既能描述砂土的剪胀性又能退化到黏土的塑性体应变<sup>[8]</sup>; 其三是通过引入状态参数弥补砂土 OCR 在低压力下不容易确定的问题并且将砂土和黏土的临界状态线和正常固结线统一起来<sup>[9]</sup>。然而这些模型虽然能够较好地模拟纯黏土和纯砂土, 但却不能很好地模拟粉 (砂) 黏混合土, 砂土的试验结果表明, 砂土具有和黏土不同形态的屈服面, 本文的思路是找到受某个或某些参数控制的屈服面, 当参数改变时, 这个屈服面能够从适用于黏土过渡到适用于粉土。而处于中间状态的屈服面就可以模拟粉 (砂) 黏混合土。

好的本构模型应该足够简洁并且方便使用, 本文研究了屈服面形态与土体塑性指数的关系, 并且通过控制屈服面形态的参数将两者之间的关系凸显出来。这样在实际应用中就可以将粉土含量或者塑性指数这种物理含义明显、容易测量且误差较小的土体物理参数作为经验参数, 去替代或补充本构模型中复杂的土体参数。

## 1 模型介绍

### 1.1 屈服面

YU<sup>[9]</sup> 基于临界状态理论结合状态参数的概念推导出了由两个物理意义明确的参数控制能够描

述多种土应力应变特性的屈服面方程, 见式 (1)。

$$\left(\frac{\eta}{M}\right)^n = -\frac{\ln(p'/p'_0)}{\ln r} \quad (1)$$

式中,  $\eta=q/p'$ ;  $n$  为一个新的材料系数;  $p'$  为当前平均正应力;  $p'_0$  为前期固结应力;  $r$  为空间比, 表示平均有效应力-比容的半对数坐标系中回弹曲线与参考固结线的交点横坐标  $p'_0$  和回弹曲线与临界状态线的交点横坐标  $p'_x$  之比。

$$r = \frac{p'_0}{p'_x} \quad (2)$$

值得指出的是, 最近的实验数据表明, 砂土空间比的值远高于黏土。本文允许空间比随不同的粉黏混合比而变化, 从而对不同的过渡土进行模拟。当  $n=1$ ,  $r=2.7183$  时该屈服面可以退化成传统剑桥模型的屈服面。

### 1.2 模型推导

这里采用传统塑性位势理论, 假设过渡土土体材料满足德鲁克塑性公设。在将该屈服面函数作为塑性势之前, 需要检验该屈服面函数是否满足临界状态理论, 因此作如下计算:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{p'} \left( \frac{1}{\ln r} - n \left( \frac{q}{p'M} \right)^{n-1} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = n \frac{q^{n-1}}{(p'M)^n} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_0} = -\frac{1}{p'_0 \ln r} \quad (5)$$

容易发现该屈服面函数作为塑性势时不能满足临界状态理论, 即  $q/p'=M$  时,  $\partial g/\partial p=0$ 。因此采用非相关流动法则, 为简化起见, 采用修正剑桥模型的塑性势<sup>[10]</sup>:

$$g = q^2 - M^2 p'(p'_0 - p') = 0 \quad (6)$$

再根据协调方程和塑性体应变含义, 推导出的硬化参数见式 (7)。

$$\Lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p_0} p_0 \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa}} \quad (7)$$

## 2 模型分析与验证

### 2.1 参数敏感性分析

本文主要探讨控制屈服面形状的两个参数: 空间比  $r$  和应力状态系数  $n$  对应力应变关系的影响。

探究  $r$  的影响时保持  $n=4$  不变, 探究  $n$  的影响时保持  $r=3$  不变, 其余参数的选取参考高岭土的相关试验研究<sup>[11-13]</sup>, 如表 1 所示:

表 1 模型参数  
Table 1 Model parameters

$e_0$	$\nu$	$M$	$\lambda$	$\kappa$	$OCR$
1.04	0.21	0.97	0.095 5	0.019 1	1

图 1 和图 2 分别反映了空间比  $r$  对不排水三轴试验中土体的偏应力发展和有效应力路径的影响。图 3 为不同的空间比  $r$  取值下屈服面形态的比较。从图 1 可以看出, 随着空间比  $r$  在一定范围内变大, 土体极限偏应力减小, 土体逐渐表现出应变软化, 并且软化程度逐渐加剧。从图 2 可以看出, 随着空间比  $r$  在一定范围内变大, 土体有效应力路径向左下方偏转, 均表现为剪缩。从图 3 可以看出, 增大空间比  $r$  对应的屈服面形态变化为屈服面最高点向下平移。

图 4 和图 5 分别反映了应力状态系数  $n$  对不排水三轴试验中土体的偏应力发展和有效应力路径的影响。图 6 为不同的应力状态系数  $n$  取值下屈服面形态的比较。从图 4 可以看出, 随着应力状态系数  $n$  在一定范围内变大, 土体极限偏应力不变, 最大偏应力变大, 土体逐渐表现出应变软化, 并且软化程度逐渐加剧。从图 5 可以看出, 随着应力状态系数  $n$  在一定范围内变大, 土体有效应力路径向左下方偏转, 均表现为剪缩。从图 6 可以看出, 增大应力状态系数  $n$  对应的屈服面形态变化为屈服面最高点向右上方移动。

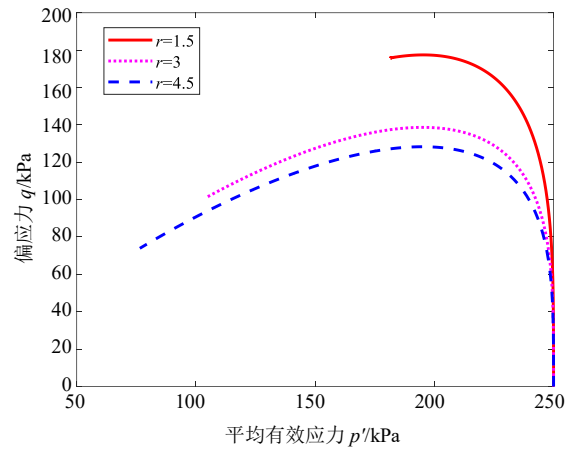


图 2 空间比对不排水三轴试验中土有效应力路径的影响  
Fig. 2 Effect of space ratio on stress path of soil in undrained triaxial test

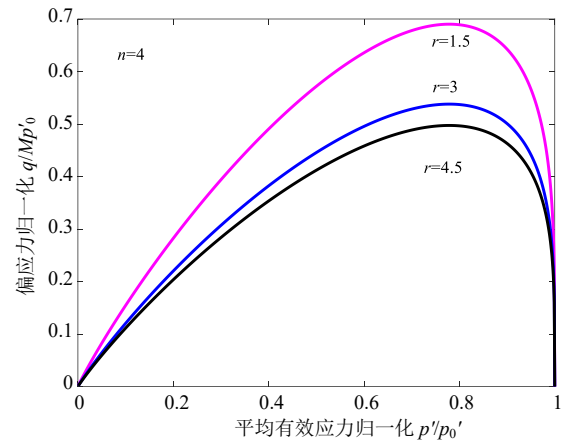


图 3 不同空间比对应的由预固结应力标准化后的状态边界面  
Fig. 3 State boundary surface normalized by preconsolidation stress corresponding to different space ratios

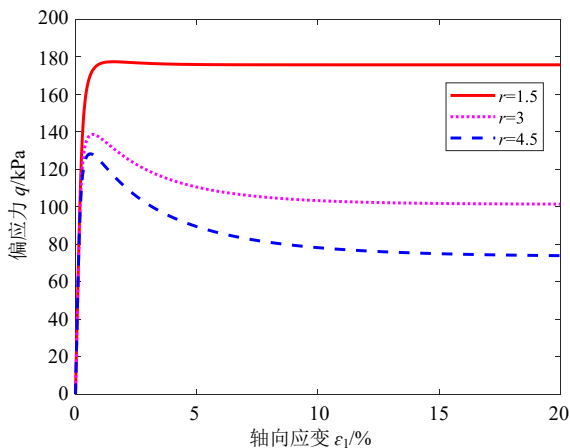


图 1 空间比对不排水三轴试验中土行为的影响  
Fig. 1 Effect of space ratio on soil behavior in undrained triaxial test

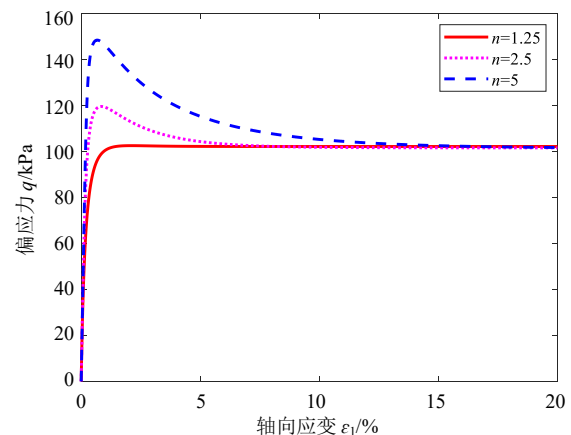


图 4 应力状态系数对不排水三轴试验中土的行为的影响  
Fig. 4 Effect of stress-state coefficient on soil behavior in undrained triaxial test

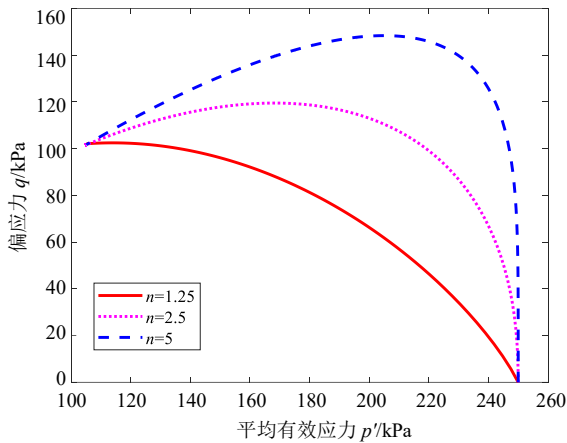


图 5 应力状态系数对不排水三轴实验中土的有效应力路径的影响

Fig. 5 Effect of stress-state coefficient on stress path of soil in undrained triaxial test

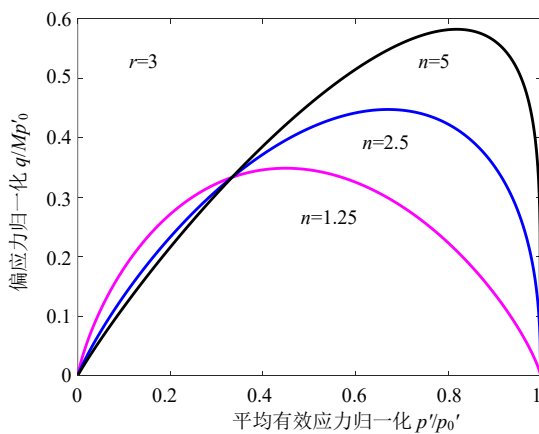


图 6 不同应力状态系数对应的由预固结应力标准化后的状态边界表面

Fig. 6 State boundary surface normalized by preconsolidation stress corresponding to different stress-state coefficient

2.2 本构模型验证

PONGPIPAT 等<sup>[11]</sup> 为了探究非塑性粉土含量对粉黏过渡土的应力应变、体积变化和强度特性的影响进行了一系列的一维固结实验, 各向同性压缩实验和排水不排水三轴试验。实验材料为 3 种将非塑性粉土和黏土以不同比例混合的重塑土。该试验的试验对象与本文的研究对象相一致, 因此本文利用该试验的试验结果对本模型进行验证。

其中黏土采用的是 Unimin Corp.公司生产的商业高岭土, 粉土采用的是 U.S. Silica Co.公司生产的 No. 125 SilCoSil 粉土, 主要成分是石英砂。

第一种土为纯高岭土, 含有 32%的粉粒和 68%的黏粒, 标记为 68-32 (为了描述简洁, 下文用此类标记代表这几种土); 第二种土为粉土和黏土的混合土, 含有 45%的黏粒, 53%的粉粒和 2%的砂粒, 标记为 45-55; 第三种土为混合土, 含有 24%的黏

粒, 72%的粉粒和 4%的砂粒。

本文将利用改进后的模型对该试验结果进行模拟。

首先需要指出的是, 在经典剑桥模型和修正剑桥模型中,  $r$  的值分别固定为 2.718 和 2.0<sup>[12-13]</sup>。这个假设对于黏土是合理的, 但在模拟砂土时却存在较大的误差<sup>[14]</sup>。因此本文允许空间比  $r$  在 1 到正无穷之间变化, 并以此模拟不同粉粒黏粒含量对应力应变关系的影响。已有研究表明, 对于黏土,  $r$  的取值在 1.5 和 3 之间。对于砂土,  $r$  的取值更大<sup>[15]</sup>。

根据 YU<sup>[9]</sup>, 可以通过对不同初始状态的土体进行一系列排水和不排水三轴试验确定应力状态系数  $n$  的取值。但本文是通过拟合 PONGPIPAT 等<sup>[11]</sup> 的试验结果的方法确定参数  $r$  和  $n$  的取值, 在拟合过程中根据 2.1 节得到的结论确定参数的调整方向。本构模型的其他参数的确定方式如下: 临界状态应力比  $M$  通过应力空间中临界状态线位置确定, 压缩系数  $\lambda$  和回弹系数  $\kappa$  通过一维固结试验确定。最终获得的参数值如表 2。模拟结果见图 7 和图 8。

表 2 模型参数

Table 2 Model parameters

参数	Soil 68-32	Soil 45-55	Soil 24-76
$e_0$	1.04	0.71	0.53
$\nu$	0.21	0.29	0.33
$M$	0.97	1.19	1.54
$\lambda$	0.191 1	0.390 9	0.156 3
$\kappa$	0.053 1	0.039 1	0.029 0
$OCR$	1	1	1
$r$	3.3	2.6	2.5
$n$	2.1	2.0	1.95

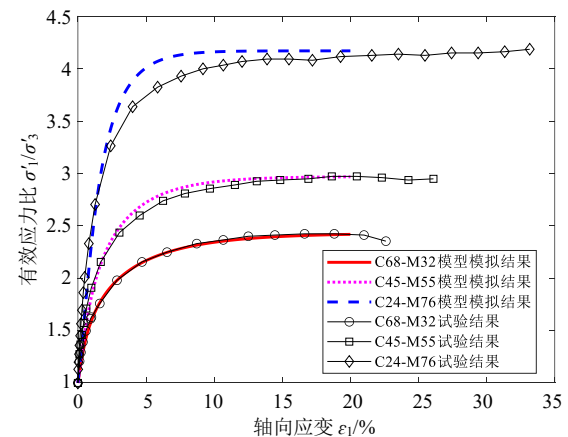


图 7 有效应力比的模型拟合结果与试验结果比较

Fig. 7 Comparison between model fitting results of effective stress ratio and experimental results

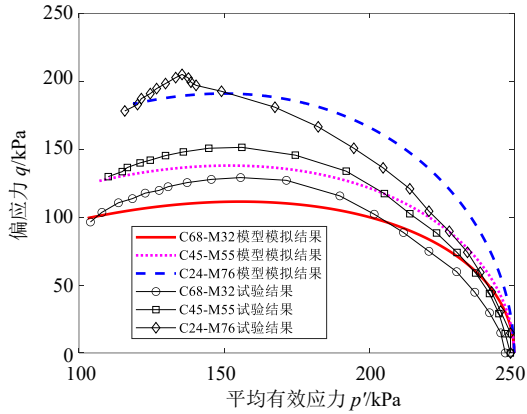


图8 应力路径模型拟合结果与试验结果比较

Fig. 8 Comparison between fitting results of stress path model and test results

本文使用同一组屈服面形态参数对 PONGPIPAT 等<sup>[11]</sup> 的排水三轴试验进行模拟, 佐证了模型的准确性, 见图9和图10。

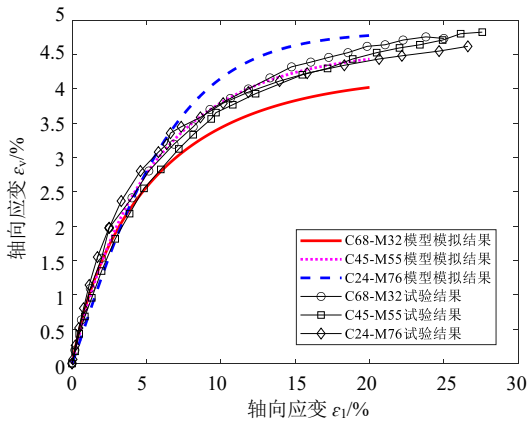


图9 排水三轴试验中体应变的模型拟合结果与试验结果比较

Fig. 9 Comparison between model fitting results and experimental results of volumetric strain in drained triaxial test

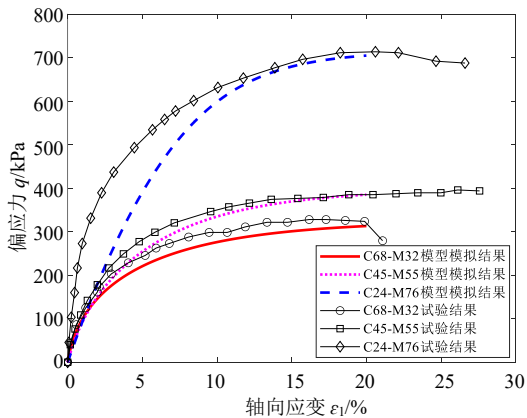


图10 排水三轴试验中偏应力的模型拟合结果与试验结果比较

Fig. 10 Comparison between model fitting results and test results of deviatoric stress in drained triaxial test

### 2.3 屈服面形态参数与塑性指数关系

塑性指数是黏性土液限与塑限的差值, 表示土处在可塑状态的含水量变化范围, 塑性指数越大, 表明土粒越细, 比表面积越大, 土中黏粒或亲水矿物(蒙脱石等)含量越高。因此本文主要探究控制屈服面形态的两个参数与塑性指数的关系, 由此得到经验性公式用于本构模型中参数的确定, 这有助于增强模型的可应用性和简洁性。

从图11中可以看出, 空间比  $r$  随着塑性指数的变大而变大, 表现在屈服面上为屈服面最高点下移, 屈服面变“扁平”。3次试验点在塑性指数-空间比空间内大致落在一条直线上, 可用最小二乘法得到该直线的解析式, 见式(8)。

$$r = 0.06I_p + 2.20 \quad (8)$$

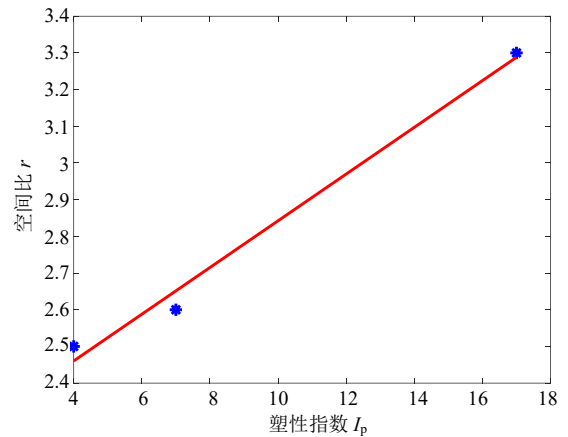


图11 空间比与塑性指数的关系及其拟合

Fig. 11 Relationship between space ratio and plasticity index and its fitting

应力状态系数  $n$  也随着塑性指数的增加而增加, 对应屈服面最高点右移。3次试验点在塑性指数的对数-应力状态系数半对数空间内大致落在一条直线上, 同样用最小二乘法可以得到该直线的解析式, 作为估算参数的经验性公式, 见式(9)。

$$n = 0.10 \ln I_p + 1.80 \quad (9)$$

需要注意的是, 以上经验公式只对于 PONGPIPAT 等<sup>[13]</sup> 的自制混合土适用, 对其他土的适用情况还需要进一步的检验。

## 3 结论

本文以 YU<sup>[9]</sup> 提出的联合状态参数模型为基础, 结合修正剑桥模型的塑性势, 推导了以形态可变屈服面为核心的统一本构模型。其次本文探究了

所提出的本构模型中控制屈服面形态的两个参数, 空间比  $r$  和应力状态系数  $n$  对应力应变关系的影响, 并绘制出了对应的屈服面形态。本文主要得出了以下结论:

(1) 本模型通过改变空间比  $r$  和应力状态系数  $n$  来改变屈服面的形态, 并且改变屈服面形态对偏应力的发展和有效应力路径均有较为明显的影响。

(2) 本文用该统一本构模型对已有的粉黏混合土试验进行了模拟, 得到了与三种粉黏混合土对应的空间比  $r$  和应力状态系数  $n$  的取值, 与试验结果比较, 具有较好的模拟效果。为了便于应用, 本文又探究了控制屈服面形态的两个参数与塑性指数之间的关系, 并通过拟合得到了两个经验性公式。

但此模型仍然存在如下问题:

(1) 模拟含砂量高的粉黏混合土的偏应力曲线时, 应力发展与实际情况相比过于迅速, 模拟效果不够理想。

(2) 本模型建立在临界状态理论的基础上, 受限于修正剑桥模型的塑性势, 对应力路径曲线形态的模拟效果不够理想。

## 参考文献

- [1] YIN J H. Properties and behavior of Hong Kong marine deposits with different clay contents[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36: 1085-1095.
- [2] MUIR W D, KUMAR G V. Experimental observations of behaviour of heterogeneous soils[J]. Mechanics of Cohesive-frictional Materials, 2000, 5(5): 373-398.
- [3] JAFARI M K, SHAFIEE A. Mechanical behavior of compacted composite clays[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, 41(6): 1152-1167.
- [4] YANG J, WEI L M, DAI B B. State variables for silty sands: Global void ratio or skeleton void ratio?[J]. Soils and Foundations, 2015, 55(1): 99-111.
- [5] 张景亮. 上海超固结粉质黏土静动力特性及路基长期沉降研究[D]. 上海: 同济大学, 2017.  
ZHANG Jing-liang. Study on static and dynamic characteristics of Shanghai overconsolidated silty clay and long-term settlement of subgrade[D]. Shanghai: Tongji University, 2017.
- [6] 盛佳初. 上海黏土力学特性综合试验研究及本构模拟[D]. 上海: 上海交通大学, 2012.  
SHENG Jia-ren. Comprehensive experimental study on mechanical properties and constitutive simulation of Shanghai clay[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2012.
- [7] WEI X, YANG J. A critical state constitutive model for clean and silty sand[J]. Acta Geotechnica, 2019, 14(2): 329-345.
- [8] YAO Y P, SUN D A, MATSUOKA H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path[J]. Computers and Geotechnics, 2007, 35(2): 210-222.
- [9] YU H S. CASM: A unified state parameter model for clay and sand[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1998, 22(8): 621-653.
- [10] DAFALIAS Y F, MANZARI M T, PAPADIMITRIOU A G. SANICLAY: Simple anisotropic clay plasticity model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, 30(12): 1231-1257.
- [11] DENG J I, TATSUOKA, KUWANO J. Effects of wetting and ageing on 1D elasto-viscoplastic behaviour of cement-mixed clay and model simulation[J]. Soils and Foundations, 2012, 52(2): 187-206.
- [12] 王凯. 高岭土动力特性和应变软化特性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.  
WANG Kai. Study on the dynamic and strain-softening behaviors of kaolin clays[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.
- [13] PONGPIPAT A, JERRY A Y, VICTOR N K. Stress-strain and strength characteristics of silt-clay transition soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, 138(10): 1257-1265.
- [14] ROSCOE K H, BURLAND J B. Engineering Plasticity[M]. Cambridgeshire: Cambridge University Press, 1968.
- [15] SCHOFIELD A N, WROTH C P. Critical State Soil Mechanics[M]. New York: McGraw-Hill Press, 1968.