

# $K_0$ 试验确定土的卸载回弹参数辨析

陈龙珠, 张思安

(上海交通大学 船建学院土木工程系, 上海 200240)

**摘要:** 基于固结压缩仪和三轴仪进行  $K_0$  试验测得的数据, 本文假设土在卸载回弹过程中表现为非线性弹性, 对卸载过程中土的静止侧压力系数与超固结比关系提出了一个适用性良好的拟合函数, 并由此推导出土的卸载回弹静止侧压力系数和泊松比算式, 两者都会随着竖向应力的减小或超固结比的增大而增大; 还推导出土的卸载回弹模量和变形模量的算式, 它们都会随着竖向应力的减小和土的回弹指数的增加而减小, 其中土的回弹变形模量的降低幅度因受回弹泊松比的影响而更为显著。本文对基坑开挖等卸载条件下地基土应力和变形计算的参数选取具有实用参考价值。

**关键词:** 土的  $K_0$  试验; 卸载回弹; 静止侧压力系数; 泊松比; 回弹模量; 变形模量

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 2096-7195(2024)02-0208-05

## Discrimination of soil parameters under unloading with $K_0$ test

CHEN Long-zhu, ZHANG Si-an

(Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Based on the data measured by consolidation compression apparatus and triaxial apparatus in  $K_0$  test, a curve-fitting function with good applicability for the relationship between the static lateral pressure coefficient of soil and the over-consolidation ratio during unloading was proposed. With assumption of the soil exhibiting nonlinear elasticity during unloading rebound, formulas were derived for the static lateral pressure coefficient and Poisson's ratio of soil during unloading rebound, showing that the two soil properties increase with the decrease of vertical stress or the increase of over-consolidation ratio. Formulas of unloading resilient modulus and rebound deformation modulus of soil were also derived, and both of the two moduli decrease with the decrease of vertical stress and the increase of swelling index of soil. The reduction of rebound deformation modulus of soil is more significant due to the influence of the rebound Poisson's ratio. This article can offer practical reference in selecting soil parameters for calculation of the stress and deformation of soil under unloading conditions in excavation.

**Key words:**  $K_0$  test of soil; unloading rebound; static lateral pressure coefficient; Poisson's ratio; modulus of resilient; modulus of deformation

## 0 引言

地下空间开发常会遇到基坑开挖。从基坑本身安全及其周围环境保护两大方面考虑, 通常在开挖前, 要在基坑周围设置阻止地基土向坑内位移和地下水向坑内渗流的围护体系, 并将坑内地下水位降低到开挖面之下一定深度处。在地下水位较浅的深厚软土地区, 一般在开挖前两周进行坑内降水, 由于地下水位大幅下降, 在这个地下水位之上的土体

自重有效应力将随之增大, 而其下方土体自重应力增加的幅度, 将取决于受土的渗透性好差影响的固结度。定性来说, 开挖前坑内降水, 对渗透性良好的坑底土提高自重有效应力和抗剪强度更为有利。但在实际基坑工程设计中, 无论坑底土的渗透系数好或差, 坑内降水的这种有利影响通常不加考虑, 仅是作为一种安全储备来对待了。

在随后的坑内土体开挖过程中, 随着开挖深度的增加, 坑底土的自重有效应力随卸载而减小, 对

原来处于正常固结的土体来说,其超固结比将随之增大。超固结土比正常固结土一般具有更高的静止侧压力系数<sup>[1]</sup>,由此土力学常识似可推论,在竖向卸载过程中,土中原有的水平应力并未与竖向应力同比例地得到释放。在基坑开挖卸载过程中,坑底土存在残余水平应力,已被实测资料所证实<sup>[2]</sup>。

对基坑平面两向尺寸相对于坑深来说大到一定程度的条件下,不考虑坑内工程桩的影响,对离开坑边一定远处的坑底,开挖使得土体处于沿着竖向的单向隆起变形状态,与常规压缩仪中土样的卸载回弹过程较为相似。但是,对坑边坑底土,还将叠加坑边围护体系和坑外土体的综合作用,开挖后的应力状态和变形要变得复杂得多。在工程设计中,对受坑边效应影响小的坑中区域,主要关注坑底土的竖向隆起特性及其对工程桩产生上浮作用的危害程度;而对坑边区域,虽然也要考虑坑底土竖向隆起的不利影响,但土的水平应力状态和抗力特性对围护体系的受力、变形和稳定的影响会变得更加重要。另一方面,采用有限元等数值模拟分析的结果表明,除土的加载压缩指数和卸载回弹指数外,泊松比也是影响坑底隆起和坑边地面沉降的一个敏感因素,但在工程设计中目前基本上还是凭借经验对其取值。为此,本文拟从一维变形的压缩和卸载试验( $K_0$ 试验)及其数据分析入手,基于土力学概念,试图找到土的卸载回弹泊松比、回弹模量和变形模量等指标参数的确定方法。

### 1 $K_0$ 试验及其数据整理方法概述

在压缩仪和三轴仪中进行  $K_0$  试验时,同时测量土样受到的竖向应力  $\sigma'_v$  和水平应力  $\sigma'_h$ , 并由此得到土的静止侧压力系数  $K_0 = \sigma'_h / \sigma'_v$ 。图 1 是典型的  $K_0$  试验曲线,对其中的福建干砂与上海③层饱和淤泥质粉质黏土<sup>[3]</sup>,首次加载压缩过程中的  $\sigma'_h - \sigma'_v$  关系基本上呈直线,其斜率就是土样在首次加载过程中的静止侧压力系数  $K_0$ 。

在卸载过程中,记  $\sigma'_{hu}$  为竖向应力卸载到  $\sigma'_v$  时土样的水平应力,由图 1 可见  $\sigma'_{hu} - \sigma'_v$  关系为下凹的曲线,每个竖向应力对应卸载时的水平应力高于其加载时的水平应力,两者之差  $(\sigma'_{hu} - K_0\sigma'_v)$  就是相应的残余水平应力<sup>[4]</sup>, 其与  $K_0\sigma'_v$  之比  $(\sigma'_{hu} / K_0\sigma'_v - 1)$  可称为水平残余应力比(无残余应力时为 0)。若记最大竖向应力和水平应力分别为  $\sigma'_{vm}$  和  $\sigma'_{hm}$ , 根据每级加载试验的稳定条件,对于土样卸载过程的任意竖向应力  $\sigma'_v$ ,借用土力学中的

超固结比定义,则有  $OCR = \sigma'_{vm} / \sigma'_v$ , 其倒数反映了土样最大竖向加载的剩余率。

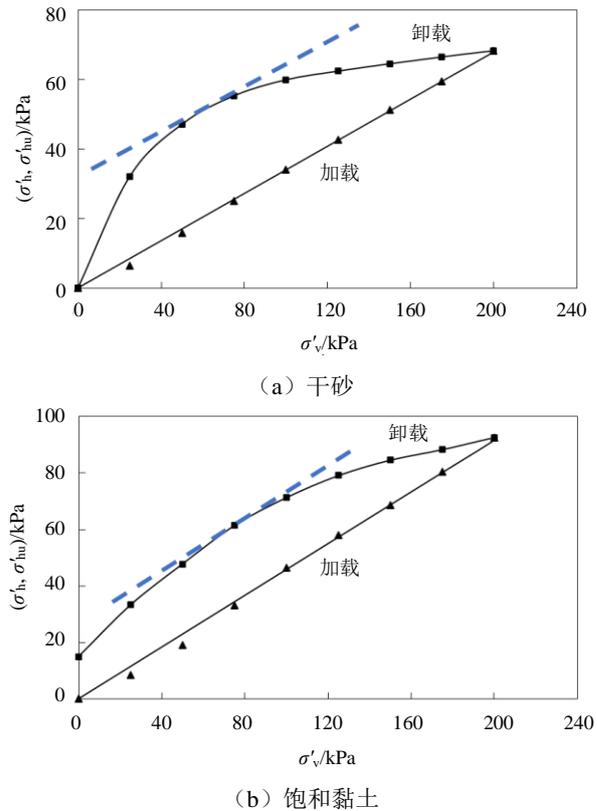


图 1  $K_0$  试验中土样应力历史

Fig. 1 Stress histories of soils in  $K_0$  tests

记土的卸载静止侧压力系数为  $K_{0u}$ , 由上述符号定义得  $K_{0u} = \sigma'_{hu} / \sigma'_v$ , 其概念类似于超固结土的静止侧压力系数。由图 1 可知,由于残余水平应力的存在,  $K_{0u}$  大于加载过程中的  $K_0$ 。参考超固结土的诸多研究文献结果<sup>[4-5]</sup>,土的卸载静止侧压力系数  $K_{0u}$  受  $OCR$  和  $K_0$  的影响,其国内外试验数据的拟合函数,目前主要包括指数型(式(1))和多项式型(式(2)):

$$K_{0u} = K_0 \cdot OCR^n \tag{1}$$

$$K_{0u} = K_0 + \alpha(OCR - 1) \tag{2}$$

式中的系数  $n$  或  $\alpha$ , 一些科技人员根据试验结果或理论分析,给出了不同的数值或算式。

### 2 土的卸载回弹侧压力系数和泊松比计算

为简便起见,暂不考虑土的蠕变效应,将其看成是弹塑性材料。试验结果表明,土在较小的加载应力作用下,就会进入塑性变形状态;而土在卸载时,主要是按弹性来改变应力和应变的。因此,在

卸载过程中,土在加载时发生的塑性应变将不会消失,使得土中留有残余应变和残余应力<sup>[2]</sup>。

以  $\sigma'_{\text{huc}}$  表示土样因竖向卸载引起回弹变形释放出的水平应力,则它可表示为:

$$\sigma'_{\text{huc}} = \sigma'_{\text{hm}} - \sigma'_{\text{hu}} \quad (3)$$

由图 1 中的卸载曲线和式 (3) 可见,从最大竖向应力  $\sigma'_{\text{vm}}$  开始,随着竖向应力  $\sigma'_v$  的降低,  $\sigma'_{\text{huc}}$  与之是非线性地逐渐增大的。因此,分别由  $\sigma'_{\text{huc}} - \sigma'_v$  关系的割线和切线斜率定义土的回弹静止侧压力系数  $K_{\text{oue}}$ ,除了卸载初期阶段近似直线外,两者数值会有差别。另一方面,从土样卸载过程的孔隙率  $e$  与竖向应力  $\sigma'_v$  关系曲线可知,土样的卸载回弹是非线性弹性的。因此,采用有限元等数值方法进行回弹过程模拟计算时,宜采取增量法按分段线性化处理。为此,可以采用  $\sigma'_{\text{huc}} - \sigma'_v$  关系曲线的切线斜率来确定土的回弹静止侧压力系数  $K_{\text{oue}}$ ,然后再采用线性弹性力学理论公式计算土的卸载回弹泊松比  $\mu_{\text{ue}}$ :

$$\mu_{\text{ue}} = K_{\text{oue}} / (1 + K_{\text{oue}}) \quad (4)$$

而对式 (3) 关于  $\sigma'_v$  求导,可得土的回弹静止侧压力系数  $K_{\text{oue}}$  为:

$$K_{\text{oue}} = \frac{d\sigma'_{\text{huc}}}{-d\sigma'_v} = \frac{d\sigma'_{\text{hu}}}{d\sigma'_v} \quad (5)$$

式 (5) 表明,由  $\sigma'_{\text{huc}} - \sigma'_v$  关系曲线的切线斜率定义土的回弹静止侧压力系数  $K_{\text{oue}}$ ,可以直接由卸载过程得到的  $\sigma'_{\text{hu}} - \sigma'_v$  关系曲线的切线斜率来计算。

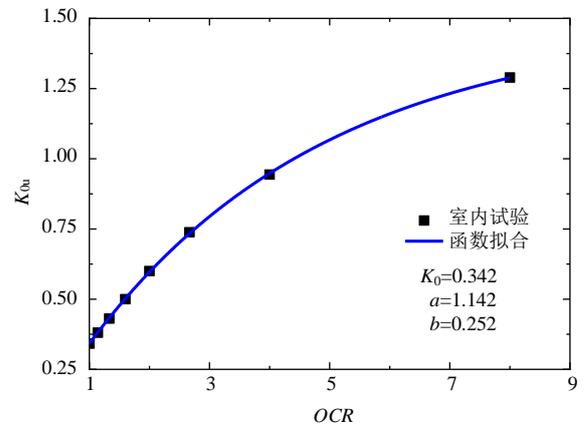
在图 1 上,可对卸载曲线作一条与加载直线平行的切线。由图 1 可见,在竖向应力自右向左卸载到该切点之前,土的回弹静止侧压力系数由较小数值逐渐增大到  $K_0$ ;当过了该切点之后继续卸载时,土的回弹静止侧压力系数将由  $K_0$  继续逐渐增大。由式 (4) 可知,土的回弹静止侧压力系数随着卸载而由小变大,卸载回弹泊松比也将是由小变大而不是一个常数。因此,对式 (1) 和式 (2),代入  $K_{\text{ou}} = \sigma'_{\text{hu}} / \sigma'_v$ 、 $OCR = \sigma'_{\text{vm}} / \sigma'_v$ ,若按式 (5) 求出的  $K_{\text{oue}}$  算式在  $\sigma'_v = \sigma'_{\text{vm}}$  时的值为  $K_0$  或对应于任意  $\sigma'_v$  的值均为一个常数,则即可定性判断该试验数据拟合函数对求取土的卸载回弹静止侧压力系数  $K_{\text{oue}}$  和泊松比  $\mu_{\text{ue}}$  的适用性将存在问题。

根据上文陈述,可以认为式 (2) 等号右边的第 2 项,反映的是土在卸载过程中残余水平应力的影响,概念清晰。在此基础上,经过对多种拟合函

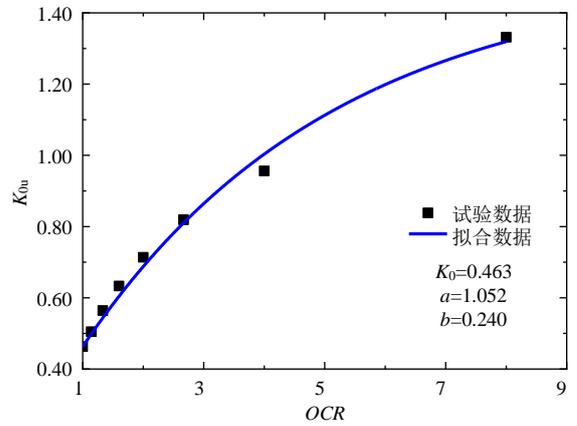
数的比较分析,本文选取如下形式的卸载静止侧压力系数拟合函数:

$$K_{\text{ou}} = K_0 + a \left[ 1 - e^{-b(OCR-1)} \right] \quad (6)$$

式中:  $a$  和  $b$  为由数据拟合确定的正常数。图 2 给出了图 1 土样在卸载过程中的静止侧压力系数与超固结比关系的拟合曲线,其拟合相关系数的平方数值不低于 0.99。还采用式 (6) 拟合了分别对常见公式  $K_{\text{ou}} = K_0 \cdot OCR^{\sin \phi'}$  ( $\phi'$  为土的有效内摩擦角) 符合程度不同的上海④层饱和黏土以及温州饱和黏土试验数据<sup>[6-7]</sup>,其拟合相关系数的平方数值均不低于 0.93,可见该式的适用性良好。



(a) 干砂



(b) 饱和黏土

图 2 土样  $K_{\text{ou}}-OCR$  关系拟合效果

Fig. 2 Fitted curves for the  $K_{\text{ou}}-OCR$  relationships of soils

将  $K_{\text{ou}}$  和  $OCR$  的定义式代入式 (6),然后再将其代入式 (5) 进行推导并整理,可得到土的卸载回弹静止侧压力系数  $K_{\text{oue}}$ :

$$K_{\text{oue}} = K_0 + a - a(1 + b \cdot OCR)e^{-b(OCR-1)} \quad (7)$$

当  $\sigma'_v = \sigma'_{\text{vm}}$  即  $OCR=1$  时,式 (7) 给出  $K_{\text{oue}} = K_0 - ab < K_0$ 。由  $K_{\text{oue}} > 0$ ,得  $ab < K_0$ ,它可作为检查式 (6) 拟合试验分析数据合理性的一个基本判据。图 3 是由图 2 拟合参数和式 (7) 计

算绘制干砂与饱和黏土试样的  $K_{0ue}-OCR$  关系曲线, 可见在卸载初期, 干砂的回弹静止侧压力系数  $K_{0ue}$  比饱和黏土的小得多, 意味着它的残余水平应力相对更大。

另外, 当卸载使得  $\sigma'_v$  数值变得很小即  $OCR \rightarrow \infty$  时, 由式 (7) 可得  $K_{0ue} \rightarrow K_0 + a$ , 其数值可能大于 1, 超出弹性力学理论的范畴。在土的卸载回弹数值模拟计算时, 对此宜取值为 1, 对应的回弹泊松比则为 0.5。

由式 (7) 求出的卸载回弹静止侧压力系数  $K_{0ue}$  代入式 (4), 便可得到各级卸载时土的回弹泊松比  $\mu_{ue}$ 。图 4 就是由图 3 和式 (4) 所得, 可见在卸载初期, 相比于饱和黏土, 干砂的回弹泊松比很小, 土的水平变形小从而限制了水平应力随竖向卸载而释放的程度。

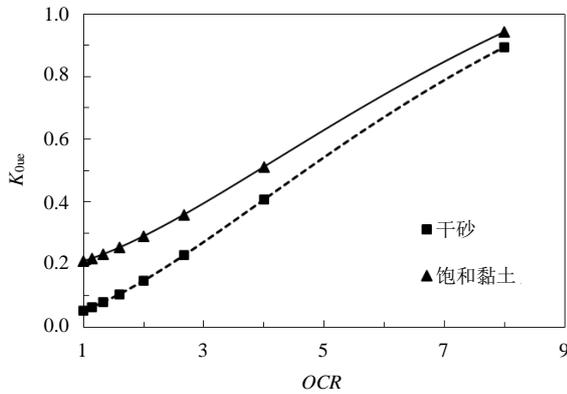


图 3 土样  $K_{0ue}-OCR$  关系曲线

Fig. 3 Curves for the  $K_{0ue}-OCR$  relationships of soils

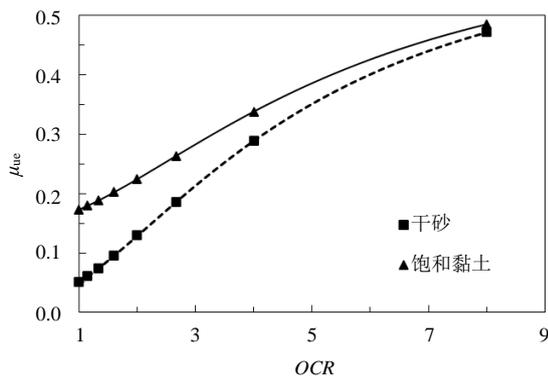


图 4 土样  $\mu_{ue}-OCR$  关系曲线

Fig. 4 Curves for the  $\mu_{ue}-OCR$  relationships of soils

### 3 土的卸载回弹模量和变形模量计算

在卸载回弹过程中,  $e-\lg \sigma'_v$  关系可近似表达为:

$$e = e_1 - C_e \lg \sigma'_v \quad (8)$$

式中:  $e$ 、 $\sigma'_v$  和  $C_e$  分别是土的孔隙比、竖向应力 (kPa) 和回弹指数;  $e_1$  是由式 (8) 推测  $\sigma'_v=1$  kPa 时土的孔隙比。

式 (8) 的增量形式为:

$$de = -\frac{C_e}{\ln 10} \frac{d\sigma'_v}{\sigma'_v} \quad (9)$$

在  $K_0$  试验条件下, 土体的应变增量与竖向应变增量  $d\varepsilon_{vue}$  相等<sup>[8]</sup>, 因此有:

$$d\varepsilon_{vue} = \frac{-de}{1+e} = \frac{C_e}{\ln 10} \frac{d\sigma'_v}{(1+e)\sigma'_v} \quad (10)$$

与加载时的压缩模量  $E_s$  定义类似, 这里记  $E_r$  为土的卸载回弹模量<sup>[9]</sup>, 结合式 (10), 得:

$$E_r = \frac{-d\sigma'_v}{d\varepsilon_{vue}} = \frac{(1+e)\sigma'_v}{C_e / \ln 10} \quad (11)$$

在这个式子中, 卸载时土的回弹泊松比对回弹模量的影响体现在孔隙比的变化上: 随着卸载量的增大, 回弹泊松比随之增大, 孔隙比回升速率会增大。但是, 对于给定的土样来说, 回弹指数  $C_e$  一定, 孔隙比  $e$  随之增大的幅度一般远小于竖向应力  $\sigma'_v$  减小的幅度。因此, 由式 (11) 可知, 土的卸载回弹模量会随着竖向应力的减小而降低。

若定义卸载比  $R = (\sigma'_{vm} - \sigma'_v) / \sigma'_{vm}$ , 则由此可得  $\sigma'_v = (1-R)\sigma'_{vm}$ 。大量试验结果表明, 随着卸载比  $R$  的增大, 土的回弹模量呈现单调快速降低的趋势<sup>[10]</sup>。可见, 式 (11) 基本上能够反映土的卸载回弹模量的变化规律。

又根据弹性力学公式, 在  $K_0$  试验条件下, 土的竖向应变增量  $d\varepsilon_{vue}$  可以表示为:

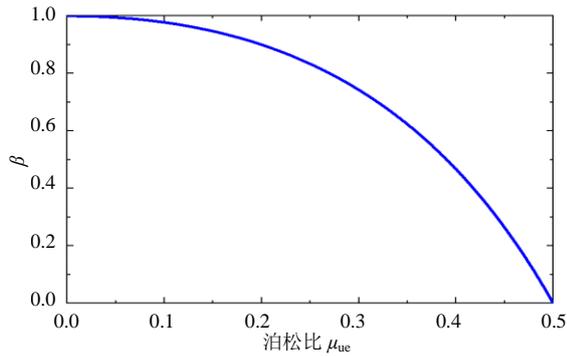
$$d\varepsilon_{vue} = \frac{(1-2\mu_{ue}K_{0ue})}{E_{ue}} (-d\sigma'_v) \quad (12)$$

式中:  $E_{ue}$  为土在卸载回弹中的变形模量。比较式 (11) 和式 (12), 并结合式 (4), 可得:

$$E_{ue} = \beta E_r \quad (13)$$

式中:  $\beta = (1+\mu_{ue})(1-2\mu_{ue}) / (1-\mu_{ue})$ 。

由图 5 所示  $\beta-\mu_{ue}$  关系曲线和式 (13) 可见, 当土的回弹指数一定时, 随着竖向卸载和回弹泊松比数值的增大, 土的弹性模量会加速下降, 土的回弹应变则随之加速增大。因此, 在土的卸载回弹过程中, 目前对泊松比主要凭经验取一个常数值的做法, 对可靠地计算土体的回弹变形和残余应力将是欠妥的。

图5  $\beta$ - $\mu_{oe}$  关系曲线Fig. 5 Curve for the  $\beta$ - $\mu_{oe}$  relationship

## 4 结论

在基坑开挖和加载预压加固地基后的卸载等工程条件下,地基土的应力和应变状态会随之变化,其计算需要对土选用合适的本构模型及参数取值。

本文假设土在卸载回弹过程中表现为非线性弹性,针对固结压缩仪和三轴仪进行  $K_0$  试验测得的数据,对卸载过程中土的静止侧压力系数与超固结比关系提出了一个适用性良好的拟合函数,并由此推导出土的卸载回弹静止侧压力系数和泊松比算式,两者数值都会随着竖向应力的减小或超固结比的增大而增大。

本文还推导提出了土的卸载回弹模量、回弹变形模量的算式,两者的数值都会随着竖向应力的减小和回弹指数的增加而减小,其中土的回弹变形模量的降低幅度因受回弹泊松比的影响而更为显著。因此,在采用数值模拟方法计算分析基坑开挖卸载的过程中,对土的回弹泊松比取一个常数的做法,值得商榷。

## 参考文献

[1] MAYNE P W, KULHAWY F H.  $K_0$ -OCR relationships in soil[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1982, 108(6): 851-872.

[2] 刘国彬, 侯学渊. 软土基坑隆起变形的残余应力分析法[J]. 地下工程与隧道, 1996(2): 2-7.

LIU Guo-bin, HOU Xue-yuan. Residual stress analysis method for heave deformation of soft foundation pit[J]. Journal of Underground Engineering and Tunnel, 1996(2): 2-7.

[3] 张思安. 基坑坑底土残余应力特性及其应用研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2020.

ZHANG Si-an. Study on residual stress characteristics and its application to excavation[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2020.

- [4] 陈树峰, 孔令伟, 罗滔. 超固结粉质黏土水平应力释放特征与静止侧压力系数计算方法[J]. 岩土力学, 2022, 43(1): 160-168.
- CHEN Shu-feng, KONG Ling-wei, LUO Tao. Lateral stress release characteristics of overconsolidated silty clay and calculation method for lateral earth pressure coefficient at rest[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(1): 160-168.
- [5] 黄博, 胡俊清, 廖先斌, 等. 原状饱和黏土静止土压力系数试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(增刊2): 4056-4064.
- HUANG Bo, HU Jun-qing, LIAO Xian-bin, et al. Experimental studies of static earth pressure coefficient of undisturbed saturated clay[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(S2): 4056-4064.
- [6] 纠永志. 开挖条件下软粘土地基桩筏基础非线性分析[D]. 上海: 同济大学, 2014.
- JIU Yong-zhi. Nonlinear analysis of pile-raft foundations during excavation in soft clay[D]. Shanghai: Tongji University, 2014.
- [7] 杨昊, 陈开创. 软粘土加卸荷过程中侧压力试验研究[J]. 建筑科学, 2021, 37(5): 88-91.
- YANG Hao, CHEN Kai-chuang. Experimental study on coefficient of lateral stress during loading-unloading for clay[J]. Building Science, 2021, 37(5): 88-91.
- [8] 赵成刚, 刘艳. 临界状态土力学[M]. 北京: 北京交通大学出版社, 2021.
- ZHAO Cheng-gang, LIU Yan. Critical State Soil Mechanics[M]. Beijing: Beijing Jiaotong University Press, 2021.
- [9] 龚晓南, 谢康和. 土力学及基础工程实用名词词典[M]. 第二版. 杭州: 浙江大学出版社, 2019.
- GONG Xiao-nan, XIE Kang-he. Dictionary of Soil Mechanics and Foundation Engineering[M]. Second Edition. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2019.
- [10] 崔瑜瑜, 吴立鹏, 沈兴华, 等. 粉质黏土基坑卸荷隆起变形的简化计算方法[J]. 岩土力学, 2023, 44(5): 1425-1434.
- CUI Yu-yu, WU Li-peng, SHEN Xing-hua, et al. A simplified calculation method for upheaval deformation induced by unloading of silty clay foundation pit[J]. Rock and Soil Mechanics, 2023, 44(5): 1425-1434.