

基于高围压三轴试验的蛋形弹塑性模型参数分析

徐日庆¹, 朱黄鼎¹, 孙华俊², 张岗平³, 吴明明³, 闫自海³

(1. 浙江大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江省发展和改革委员会, 浙江 杭州 310025;
3. 中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司, 浙江 杭州 311122)

摘要: 为了验证蛋形弹塑性模型参数在高围压条件下的稳定性, 以蛋形函数为基本框架, 以塑性功函数作为硬化参数, 采用相关联流动法则, 建立并发展了适用于应变硬化土体的弹塑性本构模型。通过一系列淤泥质软土应力路径三轴压缩试验结果的分析, 利用双线性法、非线性回归等方法, 得到了杭州黏土的蛋形弹塑性模型参数, 结果表明该模型参数在高压条件下具有较好的稳定性, 显示了蛋形弹塑性模型的优越性。进一步对模型参数进行分析, 搜集并计算了 14 组不同土的蛋形本构参数, 研究发现, 参数 a 、 d 能够共同表征土体黏聚力的情况, 参数 b 能够反映土体的抗剪能力。搜集并分析了 8 类土体的形状参数 α 和内摩擦角 φ 数据。研究发现, 对于黏性土而言, 形状参数 α 与内摩擦角 φ 的正切值近似成正比, 比例系数 $k=1.72$ 。

关键词: 蛋形强度准则; 弹塑性本构; 高围压室内三轴试验; 杭州黏土; 参数分析; 回归分析

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 2096-7195(2023)01-0009-10

Parameter analysis of the egg-shaped elastoplastic model based on triaxial tests of high confining pressure

XU Ri-qing¹, ZHU Huang-ding¹, SUN Hua-jun², ZHANG Gang-ping³, WU Ming-ming³,
YAN Zi-hai³

(1. Department of Architecture and Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, Zhejiang, China;
2. Zhejiang Provincial Development and Reform Commission, Hangzhou 310025, Zhejiang, China;
3. Power China Huadong Engineering Co., Ltd., Hangzhou 311122, Zhejiang, China)

Abstract: In order to verify the stability of the parameters of the egg-shaped elastoplastic model under high confining pressures, an elastoplastic constitutive model suitable for strain-hardened soil was established. This model was developed using the egg-shaped function as the basic framework and the plastic work function as the hardening parameters. Based on the results of triaxial compression tests with different stress paths of silty soft soil, the parameters of the egg-shaped elastoplastic model of Hangzhou clay were obtained by bilinear method and nonlinear regression. The results show that the model parameters have good stability under high confining pressures, which shows the superiority of the egg-shaped elastoplastic model. In order to further analyze the model parameters, 14 groups of different soils were collected and calculated. It was found that the parameters a and d could jointly represent the cohesion of soil, and the parameter b could reflect the shear strength of soil. The shape parameter α and internal friction angle φ of 8 kinds of soils were collected and analyzed. The results indicated that, the shape parameter α of clay is approximately proportional to the tangent of its internal friction angle φ , and the proportional coefficient k is equal to 1.72.

Key words: egg-shaped strength criteria; elastoplastic constitutive model; high confining pressure triaxial test; Hangzhou clay; parameter analysis; regression analysis

0 引言

随着我国经济的不断发展, 地下工程不断地向深层迈进。其中, 地铁车站基坑是城市深基坑工程中

典型的代表。以杭州为例, 杭州 2021 年新开通地铁线路里程约 146 km, 在建地铁线路里程超 200 km, 沿线的地铁车站基坑数量超过 100 个, 其中杭州地铁 6 号线二期火车东站 C 号基坑开挖深度达 38.08 m。

收稿日期: 2022-04-20

作者简介: 徐日庆 (1962—), 男, 浙江金华人, 博士, 教授, 主要从事土的工程性质及本构模型研究。E-mail: xurq@zju.edu.cn。

基坑工程的开挖深度、影响范围都在日益扩大。

数值方法是研究深基坑开挖和隧道施工环境效应的重要分析手段之一,在数值分析方法中,本构理论的选取、参数的确定是分析准确的关键。为了研究土体的变形,国内外学者提出了形式多样的本构模型,建立在现代塑性理论上的弹塑性本构模型是岩土本构模型中发展最完善、应用最广泛的一类模型。ROSCOE^[1]提出了Cam-clay本构模型,将“帽子”屈服准则、正交流动准则和加工硬化规律系统地应用于模型之中,提出了临界状态线(CSL)、状态边界面、弹性墙等一系列物理概念,形成了比较完整的土塑性模型,并在1968年进一步修正了剑桥模型^[2],得到了第一个土的弹塑性等向硬化盖帽模型。LADE等^[3]利用砂土的真三轴试验结果,提出了具有一个屈服面的Lade-Duncan准则,采用不相关流动规则,建立了弹塑性模型,有效克服了Mohr-Coulomb单一剪应力屈服或破坏准则。Prandtl-Reuss模型采用了Von Mises屈服函数作为材料屈服准则,是最简单的理想弹塑性模型^[4]。我国弹塑性本构模拟领域比较著名的有殷宗泽^[5]所提出的椭圆—抛物线双屈服面模型,该模型克服了经典弹塑性模型的土体应力-应变柔度矩阵不能满足主对角线元素应占优的要求,能较为准确地反映土体的变形规律。此外,任放等^[6]提出了一种形如蛋状的屈服函数,该函数是一种处处光滑连续的函数曲线,其子午面曲线既可以退化为椭圆,又可以进化为角缘光滑的三角形。因此,可以用其来替代各种加帽盖的屈服面。

蛋形本构模型克服了传统帽子模型的角点问题,在子午面内任意位置塑性应变增量方向明确,能够很好地反映软黏土的特性。该本构模型提出后,又有部分学者对该理论进行了深入的研究。徐日庆等^[7]用强度发挥度建立了屈服面和边界面之间的关系,将蛋形屈服函数进一步发展至边界面模型。王兴陈^[8]在不同围压的三轴试验下得到了人工结构性土的蛋形本构参数,并与剪切波速建立了联系。蒋佳琪等^[9]建立了针对超固结土体的蛋形本构模型,探讨了土体在超固结状态下塑性应变的发展规律。

尽管蛋形本构模型在软黏土中应用效果良好,但是现有研究均未能验证高围压下本构参数的稳定性,所使用的三轴试验围压均在500 kPa以下^[10],难以满足实际工程计算需要。此外,现有研究对于蛋形本构的参数分析也相对较少,在一定程度上制约了该本构模型的推广应用。

本研究建立了基于蛋形函数的本构模型,在不同围压应力路径三轴试验的基础上确定了蛋形本构参数,验证了该本构参数在高围压下的稳定性,

同时讨论了蛋形本构模型参数的物理意义,对蛋形本构模型进行了完善,使之能更好地反映实际深层地下工程的土体变形情况。

1 基于蛋形函数的本构模型

关于弹塑性本构理论的相关研究主要是依据塑性增量理论来建立的^[11],根据弹塑性应变的定义,土中的应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 可表示为:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (1)$$

式中: $d\varepsilon_{ij}^e$ 为可恢复的弹性应变增量; $d\varepsilon_{ij}^p$ 为不可恢复的塑性应变增量。

弹性应变增量可以用广义虎克定律分析,塑性应变增量需要用塑性增量理论进行计算。塑性增量理论以塑性公设为理论基础,以初始屈服准则、硬化规律、流动法则作为其理论的三大特征。

1.1 弹性应变

弹性应变由广义虎克定律确定,具体表达式为:

$$\begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_v^e \\ d\varepsilon_s^e \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $d\varepsilon_v^e$ 为弹性体积应变; $d\varepsilon_s^e$ 为弹性剪切应变; K 、 G 分别为土体的弹性体变模量和弹性剪切模量。

等向压缩试验可以确定弹性体变模量 K ,其计算公式为:

$$K = K_n p \quad (3)$$

式中: K_n 为试验常数,其计算公式如下:

$$K_n = \frac{1+e_0}{\kappa} \quad (4)$$

式中: κ 为 $e-\ln p$ 曲线回弹段的斜率; e_0 为初始孔隙比。

土的弹性剪切模量 G 可以根据土体的弹性体变模量 K 与泊松比 ν 的计算得到,具体计算方法如下:

$$G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K \quad (5)$$

1.2 塑性应变

(1) 屈服准则

本文在前人研究的基础上,提出采用以下蛋形函数表达式作为土体初始屈服函数:

$$\left(\frac{p-dh}{ah} \right)^2 + \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha(p-dh)(ah)^{-1}} \right)^2 \left(\frac{q}{bh} \right)^2 = 1 \quad (6)$$

式中: p 为平均主应力,实际控制土体强度变形的为有效应力 p' ,因此本文在不作特殊说明情况下,

p 均指代土体的有效应力; q 为偏应力; h 为硬化参数, 一般写作为塑性功 W_p 的函数; 参数 α 为屈服函数曲率参数, 取值范围为 $[-1,1]$, 反映了屈服函数在 p - q 平面上的曲率大小; ah 和 bh 表示 p - q 平面内蛋形屈服面长短轴半径; dh 为蛋形屈服函数在 p 轴上的中心, 如图 1 所示。

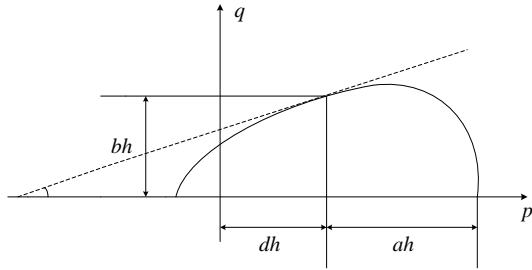


图 1 蛋形屈服面示意图

Fig. 1 Schematic diagram of egg-shaped yield surface

式 (6) 中, 蛋形函数形状控制参数 α 取值不同时, 屈服面可退化为不同形态, 如图 2 所示。

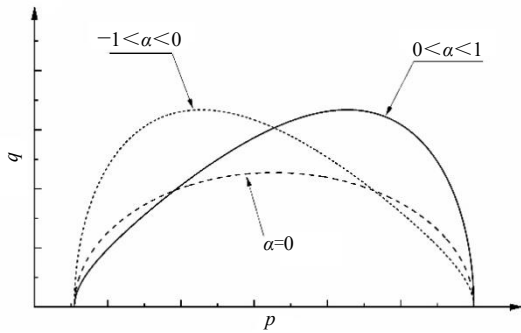


图 2 蛋形屈服面的退化形式

Fig. 2 Degenerated form of egg-shaped yield surface

由图 2 可见: 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 屈服面退化为剑桥模型子弹头形状; 当 $\alpha = 0$ 时, 屈服面退化为椭圆形状; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 屈服面表现为蛋形; 当 α 接近于 1 时, 屈服面逐渐退化为光滑的三角形。

(2) 流动法则

塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 计算方式如下:

$$\{d\varepsilon_{ij}^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (7)$$

式中: $d\lambda$ 为塑性因子, 非负的比例系数; g 为塑性势函数, 本文此处采用相关联流动法则, 即 $f=g$, f 为屈服函数。

(3) 硬化规律

本文以塑性功函数作为硬化参数, 大量试验结果表明, 对于应变硬化型的土体^[12], 硬化函数可以取如下形式:

$$h - h_0 = \frac{\psi W_p^2}{\chi + W_p^2} \quad (8)$$

式中: ψ 、 χ 是模型参数, 由试验测定; h_0 为剪切

阶段的初始硬化参数。

W_p 表示剪切过程中产生的塑性功, 不包括等向加载过程的塑性功。在室内三轴试验中常用下式进行计算^[13]:

$$W_{pji} = W_{pji(i-1)} + p_i \Delta \varepsilon_{vi}^p + q_i \Delta \varepsilon_{si}^p \quad (9)$$

h_0 为初始硬化数值, 即为加围压固结后、剪切过程前的硬化数值, 其值的大小可用下式确定:

$$h_0 = \frac{\sigma_3}{a + d} \quad (10)$$

式中: $\sigma_3 = p - \frac{q}{3}$ 。

针对应变硬化型土体, 式 (8) 中的模型参数 ψ 以及 χ 可以进一步由下列两个经验公式确定, 具体形式如下:

$$\psi = m_1 \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_1} \quad (11)$$

$$\chi = m_2 \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_2} \quad (12)$$

式中: m_1 、 m_2 、 n_1 、 n_2 是土体的材料常数; p_a 为大气压强, 取 1.01×10^5 Pa。

2 应力路径室内三轴试验研究

2.1 试验材料及试样制备

本试验选用的材料是淤泥质软土, 土体取自杭州某工地, 其基本物理力学性质如表 1 所示。

本试验使用重塑土样, 具体制备过程: (1) 将原状土土样在 105°C 下烘干, 将烘干后的土样碾碎, 通过 0.5 mm 的筛子过滤备用。(2) 取制样模具, 试样尺寸为直径 39.1 mm , 高度 80 mm , 制样时采用击样法, 每 20 mm 振捣击实, 并控制试样的初始孔隙比 $e_0 = 1.14$, 最终试样见图 3 所示。制备好的试样拆样后静置 24 h , 提高土的强度以便后续室内三轴试验的装样。



图 3 三轴试验试样

Fig. 3 Triaxial test sample

2.2 试验方案

本试验共采用 4 种不同围压工况, 其围压分布为 75 kPa 、 150 kPa 、 400 kPa 以及 $1\ 600\text{ kPa}$, 不同围压工况下再分别设置 5 组不同应力路径试验, 应力路径

由增量应力比 $\Delta\eta$ 表征, $\Delta\eta = \Delta q / \Delta p$ 。具体包括 4 组卸载三轴压缩试验, 增量应力比 $\Delta\eta$ 分别为 -1.5, -3, -6, -12, 包括 1 组常规三轴压缩试验, 增量应力比 $\Delta\eta$ 为 3。其中 4 组卸载三轴压缩试验作为蛋形屈服面参数求解的试验组, 1 组常规三轴压缩试验作为补充组。

本次试验中, 不同应力路径的室内三轴试验采用偏应力 q 来控制加载, 加载速率为 0.1 kPa/min, 以控

制压缩过程中试样产生的孔隙水压力在 1 kPa 以内, 常规三轴压缩试验采用位移控制, 剪切速率设置为 0.008 mm/min。本文所采用的室内三轴试验为固结排水试验, 不同应力路径的室内三轴试验方案如表 2 所示。

2.3 试验结果

图 4、图 5 分别是杭州淤泥质软土重塑土样在不同固结压力和应力路径下偏应力-轴向应变和体积应变-轴向应变的关系曲线。

表 1 土体基本物理力学性质

Table 1 Physical and mechanical properties of soil

重度 $\gamma_w / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	天然含水率 $w / \%$	土体比重 G_s	液限 $\omega_L / \%$	塑限 $\omega_P / \%$	塑性指数 I_P	破坏应力比 M
18.9	44.7	2.73	48.3	25.5	22.8	1.31

表 2 不同应力路径的室内三轴试验方案

Table 2 Triaxial test schemes with different stress paths

土体类型	试验编号	固结围压 p_0 / kPa	增量应力比 $\Delta\eta$
淤泥质软土重塑 样	1-1/1-2/1-3/1-4/1-5	75	3/-12/-6/-3/-1.5
	2-1/2-2/2-3/2-4/2-5	150	
	3-1/3-2/3-3/3-4/3-5	400	
	4-1/4-2/4-3/4-4/4-5	1 600	

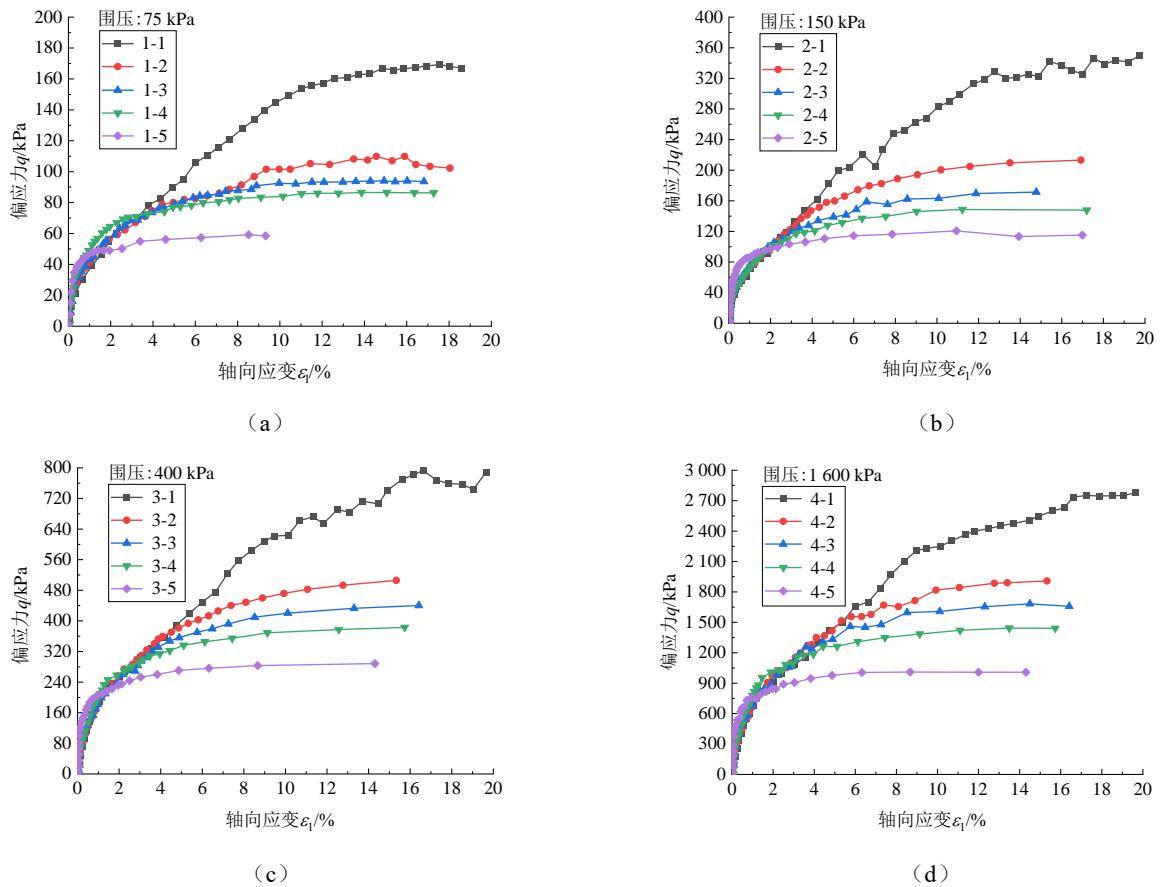


图 4 杭州黏土三轴试验偏应力与轴向应变关系曲线

Fig. 4 Deviatoric stress-axial strain curves of Hangzhou clay under triaxial load

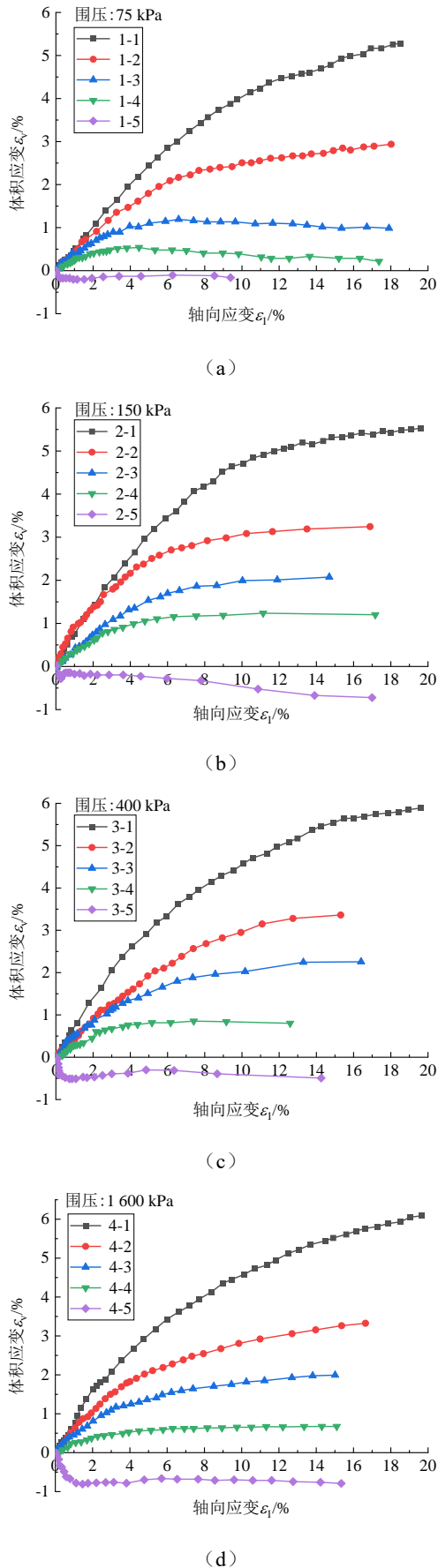


图 5 杭州黏土三轴试验体积应变与轴向应变关系曲线
 Fig. 5 Relationship between the volumetric strain and axial strain of Hangzhou clay under triaxial load

由图 4 中可以看到, 在不同应力路径三轴试验中, 杭州黏土均表现出硬化特性, 其硬化偏应力峰值随样品编号增大而减小, 其原因是 1 号组试样为加压压缩试验组 ($\Delta\eta=+3$), 而 2、3、4、5 组试样为减压压缩试验组 ($\Delta\eta=-12、-6、-3、-1.5$), 三轴试验中加压后土体强度将显著增加, 减压试验中土体强度相对减小。此外, 在轴向应变处于较小值时 (区间下), 可以看到 2、3、4、5 组试样应力增长速度较 1 组试样更快, 这是由于减压压缩试验组在变形初期应力-应变关系曲线近似直线, 表现出近似弹性性质, 而加压压缩试验组在变形初期则表现出弹塑性变形, 具有一定的延性。此外, 不同的围压也显著影响了土样的偏应力峰值, 具体表现为围压越大, 偏应力峰值越高。

由图 5 中可以看到, 在不同的围压条件下, 只有在减压压缩路径下 ($\Delta\eta=-1.5$) 土体表现出剪胀特性, 其余应力路径下均表现为剪缩性状。究其原因, 是由于该路径的增量应力矢量方向角较大, 且为卸荷路径, 卸荷过程中围压的下降比其余试验组要更为明显, 使得试样在一定程度上发生了回弹, 因此出现了剪胀现象, 而且剪胀随着围压的升高而更为明显。第 1、2 组试验均表现出围压越大剪缩现象越明显的特性, 这个现象与砂土的常规三轴固结排水剪切试验结果相类似^[14]。第 1 组试验为加荷试验, 第 2 组试验的增量应力矢量方向角接近 90° , 类似于等 p 试验, 因此没有表现出试样回弹而产生的剪胀效应。第 3、4 组试验在低围压下, 表现出剪缩现象随着围压增大而增强, 在较高围压下, 表现出因试样回弹而导致的剪胀现象。

3 蛋形本构参数的确定

3.1 蛋形屈服面参数的确定

根据图 4 所示试验结果, 按双线性法, 利用 Matlab 对式 (6) 进行拟合, 其中初始硬化参数 h_0 根据式 (10) 确定, 拟合结果如图 6 所示。

同一围压下, 4 条不同应力路径所得到的屈服点应力状态可以较好地拟合得到蛋形屈服函数。由图 6 中可以看出, 蛋形初始屈服面函数在较低应力水平时, $p-q$ 图中近似成直线状, 这与 D-P 准则相一致, 因此可以认为在同一组试验数据中, 蛋形屈服面函数和 D-P 屈服轨迹应该近似重合。但是蛋形屈服函数存在曲率系数, 在较高应力水平时会偏离 D-P 屈服轨迹, 因而可以认为两者成相切状态, 具体表现为在三维应力空间中 D-P 准则所对应的圆锥外切于蛋形屈服面。上述拟合所得的蛋形屈服面参数如表 3 所示。

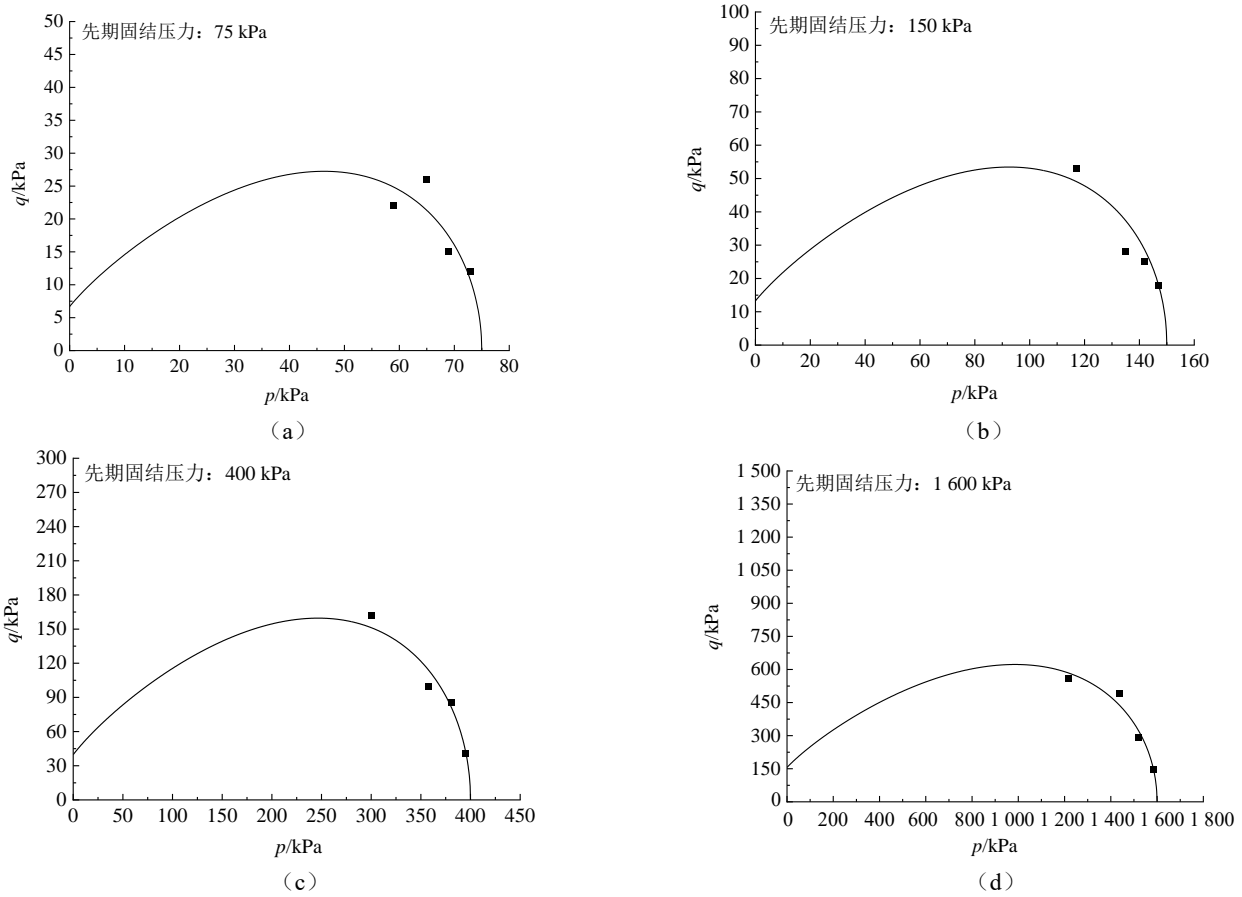


图6 不同围压条件下土体蛋形初始屈服面

Fig. 6 Egg-shaped initial yield surface of soil under different confining pressures

表3 不同围压条件下土体蛋形屈服面参数

Table 3 Egg-shaped yield surface parameters of soil under different confining pressures

围压/kPa	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	α
75	1.054	0.513	0.958	0.692
150	1.058	0.506	0.962	0.690
400	1.046	0.538	0.943	0.691
1 600	1.049	0.525	0.945	0.689
平均值	1.050	0.520	0.950	0.690

由表3中可以看到,不同围压条件下所得到的蛋形屈服面参数变化幅度较小,在高围压条件下($\sigma_3 = 1\ 600\ \text{kPa}$),蛋形屈服面参数数值未发生较大变化,进一步验证了蛋形屈服面理论和参数选择的正确性,将4种不同围压下所得到的蛋形屈服面参数取平均值作为本文中杭州软黏土的蛋形屈服面参数值。

3.2 弹性参数的确定

硬化参数 ψ 和 χ 的计算需要得到塑性体积应变 ε_v^p 和塑性剪切应变 ε_s^p , 而塑性应变的计算需要通过总应变减去弹性应变得到。因此,在硬化参数确定之前,需要先行确定土体的弹性参数。本节增加1组等向压缩再回弹试验计算土体的弹性体变模量 K 和弹性剪切模量 G 。

(1) 等向压缩再回弹试验方案

本次试验主要用于测定土体的弹性体变模量 K , 并利用式(5)计算得到土体的弹性剪切模量 G 。设置等向压缩再回弹试验1组,加载压力共分为6级,每一级压力由低到高分别为25 kPa、50 kPa、100 kPa、200 kPa、400 kPa、800 kPa。在压缩试验过程中,逐级加压至800 kPa后逐级卸压,土样即回弹,测得土样回弹稳定后的孔隙比,可以绘制出相对应的孔隙比和加载压力关系曲线。

(2) 试验结果

图7为杭州黏土的等向压缩再回弹试验的 $e-\ln p$ 曲线,从回弹曲线中可以得到:

$$\kappa = \frac{\Delta e}{\Delta \ln p} \tag{13}$$

$$de = -\frac{\kappa}{p} dp \tag{14}$$

式中: κ 为 $e-\ln p$ 曲线回弹段的斜率。

由图7可知,杭州黏土 $e-\ln p$ 曲线回弹段的斜率,将数值代入式(4)中可得:

$$K_n = \frac{1+e_0}{\kappa} = 79.3 \tag{15}$$

对于等向压缩曲线,有:

$$\lambda = \frac{\Delta e}{\Delta \ln p} \quad (16)$$

由图 7 可知, 杭州黏土 $e-\ln p$ 曲线等向压缩段的斜率 $\lambda=0.123 2$ 。计算弹性体积应变 ε_v^e 和弹性剪切应变 ε_s^e 所需的弹性体变模量 K 和弹性剪切模量 G 分别可以通过式 (3) 和式 (5) 求得。其中, 本文取土体泊松比 $\nu=0.3$ 。

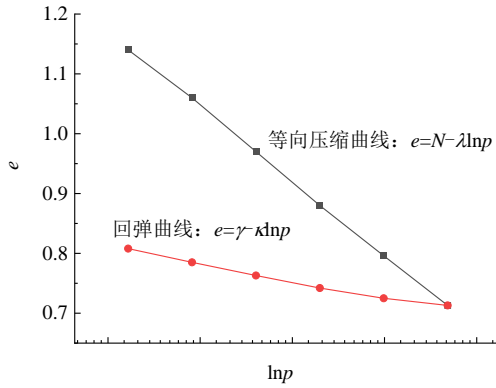


图 7 等向压缩试验 $e-\ln p$ 曲线

Fig. 7 $e-\ln p$ curves of the isotropic compression test

3.3 硬化参数的确定

为了考虑加载过程中的硬化规律, 本文将蛋形屈服函数的硬化参数 h 表征为与塑性功 W_p 相关的函数。利用式 (9) 和前述不同应力路径下的三轴试

验和等向压缩再回弹试验数据可以求得任一应力条件下的塑性功, 此处所求得的塑性功 W_p 不包括等向压缩阶段, 即在等向压缩阶段剪切塑性功为 0, 剪切阶段硬化参数初始值 h_0 可以通过式 (10) 确定。由于本模型采用加载条件相关联的流动法则, 因此可以通过式 (6) 求得任一应力条件下的硬化参数 h 。综上可得 $h-h_0$ 和塑性功 W_p 的相对应关系, 由于本文所取得围压跨度较大, 当围压在 400 kPa、1 600 kPa 时, 所得的硬化参数 $h-h_0$ 会显著增加, 从而使得参数 ψ 和 χ 指数增加, 不方便拟合和计算, 因此本文采用建立硬化参数 $(h-h_0)/100$ 和塑性功 W_p 的相互关系, 如图 8 所示。

根据图 8 所得硬化参数 h 和塑性功 W_p 之间的曲线关系, 根据式 (8) 进行非线性回归分析, 分析所得数据见表 4 所示。

根据式 (11)、(12) 硬化参数系数可以进一步由土体材料参数 m_1 、 m_2 、 n_1 、 n_2 确定。对于本文试验中的杭州黏土, 相应的材料参数取值分别为: $m_1=7.82$, $m_2=130.4$, $n_1=0.78$, $n_2=2.68$, 相关系数 R^2 分别为 0.996 和 0.998, 见图 9 所示, 拟合效果较好。

本文得到了杭州黏土蛋形本构模型的全部参数。可以看到, 蛋形本构模型参数在高围压下的稳定性良好, 进一步证明了本构模型的正确性。

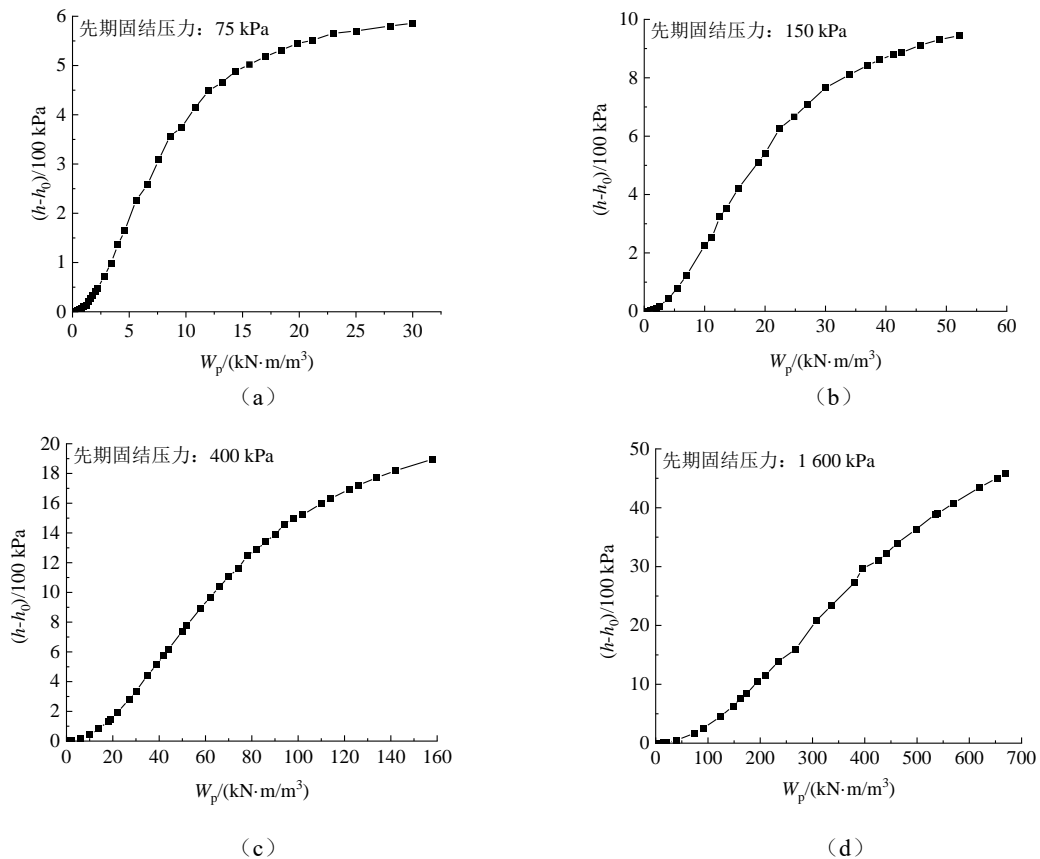
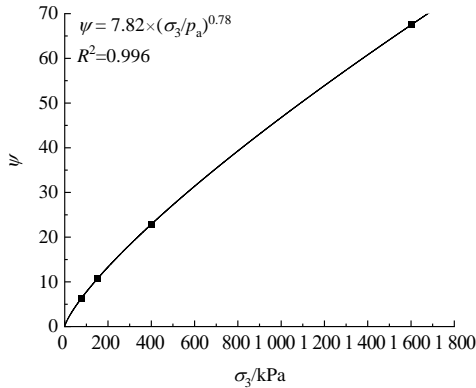


图 8 硬化参数 h 与塑性功 W_p 的关系

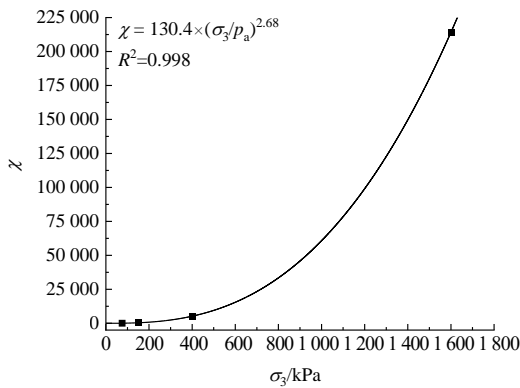
Fig. 8 Relationship between the hardening parameter h and plastic work W_p

表4 不同围压下硬化参数系数非线性回归分析结果
Table 4 Nonlinear regression analysis of the hardening parameter coefficients under different confining pressures

围压/kPa	ψ	χ
75	6.24	59.2
150	10.75	377.8
400	22.89	5 241.7
1 600	67.69	214 238.8



(a)



(b)

图9 参数 ψ 和 χ 的回归分析结果

Fig. 9 Results of the regression analysis of parameters ψ and χ

4 蛋形本构模型的参数分析

本文通过搜集不同类型土体的室内三轴试验相关文献资料，按照前文所述的方法步骤，计算得到了9组不同类型土的蛋形屈服面参数（见表5序号2-10）。同时，通过直接搜集蛋形屈服面参数研究的相关文献，得到了4组人工结构性土的蛋形屈服面参数（见表5序号11-14）。共计得到14组不同类型土的蛋形屈服面参数，如表5及图10所示。

由图10可以看到，在不同类型土的蛋形屈服面参数 a 、 b 、 d 、 α 参数中，参数的波动排序为： $b >$

$d > a > \alpha$ 。其中参数数值分布依据土的类型不同主要分为两类，1-10类的非结构性土（包括砂土和黏土）和11-14类加水泥含量的人工结构性土。在非结构性土中，砂土（2-3类）主要表现为参数 a 、 d 均等于1，将参数代入式（6）发现，砂土所得的蛋形屈服面的顶点在子午面上经过了坐标原点，与剑桥模型类似，忽略了土体的抗拉能力。究其原因，主要是由于无黏性土（如砂土）的黏聚力 $c=0$ ，因而土体无法承受拉力。更为一般地，将 p - q 平面坐标原点 $(0,0)$ 代入式（6）中，得到下式：

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 = 1 \tag{17}$$

显然，参数 a 、 d 能够共同表征土体黏聚力的情况，其比值 d/a 可以认为是描述土体抗拉性能的参数。其中，参数比值 d/a 必须满足 $d/a \leq 1$ ，否则会出现子午面坐标原点在屈服面外的情况，不符合工程实际。当且仅当 $d/a=1$ 时，蛋形屈服面经过子午面坐标原点，即不考虑土体的抗拉特性。参数比值 d/a 的取值范围为 $(0,1]$ ，取值越小，说明土体的抗拉能力越好。部分蛋形屈服面的研究中，其屈服面表达式不含参数 d ，可以理解为默认 $d=1$ ，则参数 a 必须满足条件 $a \geq 1$ 。

蛋形屈服参数表现出同性质的土变化小，不同性质土变化大的特征。其中变化最大的为屈服面参数 b ，砂土和黏土在屈服面参数 b 上有着明显不同，两类砂土的 b 拟合值约为0.8，而黏土的 b 拟合值大多约为0.5。蒋佳琪^[15]的研究表明，形状参数 $b > 0$ ，且主要描述土体材料的抗剪能力。

在杭州黏土重塑土中掺入水泥会显著改变 a 、 b 、 d 三大参数，序号11-14四种人工结构性土的 a 、 b 、 d 与前述土差异巨大，表明蛋形屈服参数受结构性影响大。随着水泥含量的增加， a 、 b 、 d 均表现出增长的趋势，且 d/a 的均值普遍低于1-10类土。在黏土中掺入一定量的水泥会提高其胶结特性，进一步说明 d/a 描述土体抗拉能力的正确性。

蛋形屈服面形状参数 α 在4个参数中波动最小，基本稳定在0.7左右。王兴陈^[8]对参数 α 进行过深入的分析，分析表明形状参数与土体的内摩擦角 ϕ 的正切值近似成正比。本文通过搜集相关文献及资料，得到部分土体材料内摩擦角参考值，如表6所示。

利用 Matlab 对上述数据按照式(18)进行拟合，拟合结果不理想。主要原因是2、3号土体参数点偏离严重，剔除2、3两个数据点后，拟合结果较为合理， $R^2=0.967$ ，拟合参数 $k=1.72$ ，95%置信区间为 $(1.711, 1.730)$ ，拟合结果见图11所示。

表 5 不同类型土的蛋形屈服面参数

Table 5 Egg-shaped yield surface parameters of different types of soil

序号	土体类型	试验来源	a	b	d	α
1	杭州黏土	本文	1.05	0.52	0.95	0.69
2	珊瑚砂	何绍衡等 ^[16] , 2019	1.00	0.80	1.00	0.67
3	上海粉细砂	黄茂松等 ^[17] , 2008	1.00	0.83	1.00	0.70
4	台州黏土	蒋佳琪 ^[15] , 2020	1.08	0.49	1.00	0.67
5	Fujinomori 黏土	姚仰平等 ^[18] , 2007	0.97	0.57	0.93	0.68
6	上海海相软黏土	陈波等 ^[19] , 2015	1.06	0.56	0.94	0.66
7	苏州软土	陈波等 ^[19] , 2015	1.09	0.54	0.98	0.67
8	软黏土	徐日庆等 ^[7] , 1997	1.43	0.64	1.00	0.66
9	Boom Clay	SULTAN 等 ^[20] , 2010	1.19	0.43	1.10	0.64
10	Winnipeg Clay	GRAHAM 等 ^[21] , 1988	1.10	0.46	1.00	0.66
11	杭州黏土+3%水泥 (结构性土)	王兴陈 ^[8] , 2014	0.53	0.24	0.35	0.72
12	杭州黏土+4%水泥 (结构性土)	王兴陈 ^[8] , 2014	0.54	0.25	0.37	0.70
13	杭州黏土+5%水泥 (结构性土)	王兴陈 ^[8] , 2014	0.57	0.26	0.39	0.72
14	杭州黏土+6%水泥 (结构性土)	王兴陈 ^[8] , 2014	0.58	0.28	0.42	0.69

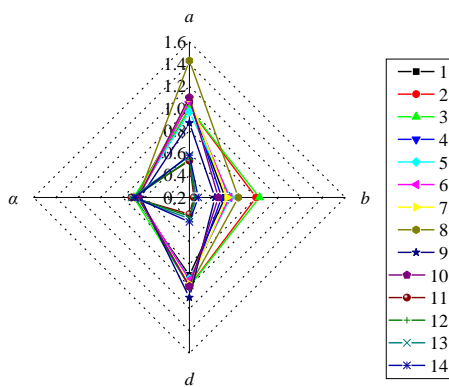


图 10 不同类型土的蛋形屈服面参数

Fig. 10 Egg-shaped yield surface parameters of different types of soil

表 6 不同类型土的内摩擦角 φ 参考值

Table 6 Reference values of the internal friction angle φ for different types of soil

序号	土体类型	α	内摩擦角 $\varphi/(^\circ)$
1	杭州黏土	0.69	21.9
2	珊瑚砂	0.67	30.1
3	上海粉细砂	0.70	32.3
4	台州黏土	0.67	21.3
5	上海海相软黏土	0.66	20.8
6	苏州软土	0.67	21.4
7	软黏土	0.66	21.0
8	杭州黏土+水泥	0.71	22.4

注: 王兴陈^[8] 将 4 种不同掺量水泥土的 α 和内摩擦角 φ 取了平均值。

$$\alpha = k \tan \varphi \quad (18)$$

可见, 形状参数 α 擦角 φ 近似成正比的结论不成

立于所有土, 黏土材料和砂土材料的试验系数 k 不同。对于黏性土而言, 本文得到的试验系数 k ($k=1.72$) 与王兴陈^[8] 系数 k ($k=1.719$) 差距极小, 进一步验证了公式的正确性。由于本文搜集到的砂性土样例太少, 不足以验证拟合结果的正确性, 因此此处不做砂性土形状参数 α 与土体的内摩擦角 φ 相关关系的拟合。

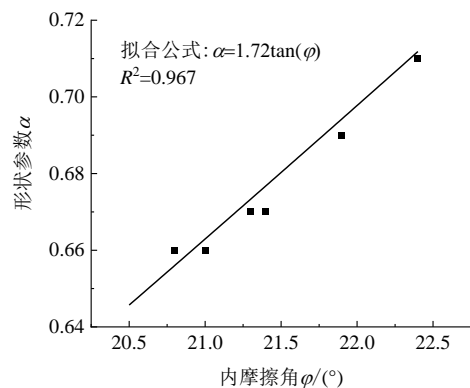


图 11 形状参数 α 与内摩擦角 φ 的相互关系

Fig. 11 Relationship between the shape parameter α and the internal friction angle φ

5 结 论

土的变形理论是土力学计算的核心问题, 随着地下工程不断向深层迈进, 土的变形计算需要考虑更高围压的工况条件。因此, 验证高围压下蛋形本构参数的稳定性, 无论是对于蛋形本构理论的扩充还是对于工程实际应用都具有重要的意义。本文在前人既有研究的基础上, 通过本构模型的建立、室

内三轴试验,将理论和试验相结合,对蛋形本构理论展开了深入的研究,对模型的框架、参数的确定及讨论进行了广泛的讨论,主要研究工作及结论如下:

(1)建立了基于蛋形函数的本构模型。蛋形函数由参数 a 、 b 、 d 以及 α 共同表征,在 p - q 平面上光滑且连续。通过参数变换,蛋形函数可退化为不同类型的屈服曲线,包括水滴形、椭圆形、子弹形以及三角形,并克服了传统剑桥模型屈服面的角点问题。本文在塑性增量理论基础上,以蛋形函数作为屈服准则,以塑性功函数作为硬化参数,采用相关联流动法则,完成了该本构模型的构建,并给出了各参数的确定方法。整体模型具有 10 个参数,包含了 2 个弹性参数: K_n 、 ν , 屈服函数参数: a 、 b 、 d 、 α 和 4 个硬化参数: m_1 、 m_2 、 n_1 、 n_2 。

(2)完成了 20 组不同围压、不同应力路径下的室内三轴试验及 1 组等向压缩再回弹试验。试验结果表明,杭州黏土在不同应力路径下均表现出硬化特性,偏应力峰值随应力增量比 $\Delta\eta$ 的减小而减小。在应变初期,应力增长速度随应力增量比 $\Delta\eta$ 的减小而增大,减压压缩试验组应力应变曲线近似直线,表现出近似弹性性质,而加压压缩试验组表现出弹塑性变形。

(3)分析了蛋形屈服函数各参数的物理意义,建立了黏土条件下形状参数 α 和内摩擦角 φ 的经验公式。研究发现,参数 a 、 d 能够共同表征土体黏聚力的情况,其比值 d/a 可以认为是描述土体抗拉性能的参数,且必须满足 $d/a \leq 1$,当土体类型为砂土时,满足 $d/a=1$ 。参数 b 主要描述土体材料的抗剪能力,且必须满足 $b > 0$ 。对于黏土而言,参数 α 与土体内摩擦角 φ 的正切值近似成正比,比例系数 $k=1.72$,即 $\alpha=1.72 \tan \varphi$ 。

(4)得到了杭州黏土蛋形本构模拟的各项参数。利用室内三轴试验的试验结果,利用双线性法获得各卸载应力路径下的屈服点,通过数值回归得到蛋形屈服面参数 a 、 b 、 d 、 α ; 利用等向压缩再回弹试验,确定了试样的塑性应变,求得了弹性参数 K_n ,进一步得到了硬化参数与塑性功之间的关系曲线,利用回归分析最终计算得到硬化参数 m_1 、 m_2 、 n_1 、 n_2 ,结果表明,蛋形本构模型的各项参数在不同围压条件下变化不大,在高围压条件下稳定性良好,进一步证明了本模型的优越性。

参考文献

- [1] ROSCOE K H. On yielding of soils[J]. Geotechnique, 1958, 8: 96-107.
[2] ROSCOE K H. Soils and model tests[J]. The Journal of

- Strain Analysis for Engineering Design, 1968, 3(1): 57-64.
[3] LADE P V, DUNCAN J M. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1975, 101(10): 1037-1053.
[4] 倪晓燕. 塑性流动下砂岩渗透性的试验研究[D]. 江苏徐州: 中国矿业大学, 2018.
NI Xiao-yan. Experimental study on permeability of sandstone under plastic flow[D]. Xuzhou, Jiangsu: China University of Mining and Technology, 2018.
[5] 殷宗泽. 土体的椭圆——抛物双屈服面模型及其柔度矩阵[J]. 水利学报, 1996(12): 23-28.
YIN Zong-ze. The ellipse-parabolic double yield surface model of soil and its flexibility matrix[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1996(12): 23-28.
[6] 任放, 盛谦, 常燕庭. 岩土类工程材料的蛋形屈服函数[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(4): 33-39.
REN Fang, SHENG Qian, CHANG Yan-ting. Egg-shaped yield function of geotechnical engineering materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 15(4): 33-39.
[7] 徐日庆, 龚晓南. 土的边界面应力应变本构关系[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 1997, 25(1): 29-33.
XU Ri-qing, GONG Xiao-nan. Stress-strain constitutive relation of soil boundary interface[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 1997, 25(1): 29-33.
[8] 王兴陈. 基于物理性质的土体强度和变形特性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2014.
WANG Xing-chen. Study on properties of strength and deformation of soil based on physical characteristics[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014.
[9] 蒋佳琪, 徐日庆, 裘志坚, 等. 超固结土的蛋形弹塑性本构模型[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2021, 55(8): 1444-1452.
JIANG Jia-qi, XU Ri-qing, QIU Zhi-jian, et al. Egg-shaped elasto-plastic constitutive modeling for over-consolidated clay[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2021, 55(8): 1444-1452.
[10] 吴渐. 基于蛋形模型的应力和渗流固结分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2014.
WU Jian. Stress and seepage consolidation analysis based on egg-shaped model[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014.
[11] 秦理曼. 基于能量耗散的土的本构关系研究[D]. 辽宁大连: 大连理工大学, 2006.
QIN Li-man. Soil constitutive models based on energy dissipation[D]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology, 2006.